Exercice I

On considère l'équation différentielle : $(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.
   $u'(x) + u(x) = (\mathrm{e}^{-x} + x \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x}) + x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$
   Donc la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$ soit $(E') \iff y' = -y$.
   L'équation différentielle $y' = ay$ a pour solutions les fonctions $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle (E') a pour solutions les fonctions $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. La solution générale de l'équation (E) est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre associée (E'), et d'une solution particulière de (E).
   On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$ ou encore $x \longmapsto (k+x)\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
4. On cherche l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.
   $g(0) = 2 \iff k\,\mathrm{e}^0 = 2 \iff k = 2$; donc

$$g(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Remarque importante : La question 3 met le doigt sur un résultat énoncé du cours : toute solution d'une équation différentielle avec second membre (E), ici y'+y =e^{-x}, est la somme des solutions de l'équation sans second membre (E_0) (ici y'+y =0) et d'une solution particulière de (E) que l'énoncé vous fera toujours trouver (la fonction u de la question 1 ici).

Cela évite de démontrer à chaque fois que :

f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ équivaut à f-u est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

Exercice I

1. a. Dans le repère $\left(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on a les points suivants :
H(0 ; 2 ; 2), M(3 ; 0 ; 1) et N(3 ; 1 ; 1).

b. On a $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (HM) est dirigée par $\overrightarrow{HM}$ et elle passe par H, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_H + t x_{\overrightarrow{HM}} \\ y = y_H + t y_{\overrightarrow{HM}} \\ z = z_H + t z_{\overrightarrow{HM}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

2. Dans le repère $\left(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes :

B(2 ; 0 ; 0) C(2 ; 2 ; 0) F(2 ; 0 ; 2)

Le plan (BCF) est parallèle au plan yOz, son équation est donc de la forme $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ici on a donc $x = 2$

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de (HM) soit un point de (BCF) :

$$\begin{aligned} M_t \in (BCF) &\iff x_{M_t} = 2 \\ &\iff 3t = 2 \\ &\iff t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

P est donc $M_{\frac{2}{3}}$ sur la droite (HM), il a donc comme coordonnées :

$x_P = 2$, $y_P = 2 - 2 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ et $z_P = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Cela confirme $P\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$

3. a. $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} x_M - x_P \\ y_M - y_P \\ z_M - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées :

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 1 \times 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

b. $PM = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$

c. On sait que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = PM \times PN \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

On a donc $\frac{8}{9} = \frac{\sqrt{14}}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{3} \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

d'où $\cos\left(\widehat{MPN}\right) = \frac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$ soit $\widehat{MPN} \approx 50°$.

L'angle ne dépasse pas 55°, le toit peut donc être construit.

4. Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles , elles sont donc sécantes.

On a $\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix} x_N - x_E \\ y_N - y_E \\ z_N - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (EN) est dirigée par $\overrightarrow{EN}$ et elle passe par E, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_E + t x_{\overrightarrow{EN}} \\ y = y_E + t y_{\overrightarrow{EN}} \\ z = z_E + t z_{\overrightarrow{EN}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

Pour trouver l'intersection des droites (EH) et (MN), il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 3t = 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 2 - t = 2 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 - 2t = t \\ 2 - t = 2 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 = 3t \\ 0 = 0 \end{cases} \iff t = t' = \frac{2}{3}$$

P est donc le point d'intersection de ces deux droites.

Exercice III

1. a. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (en comparant les premières coordonnées, s'il l'étaient on aurait $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, ce qui est faux), donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan unique $\mathscr{P}$.

b. On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, puis

- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 - 1 - 3 = 0$;
- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 + 0 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$, c'est donc un vecteur normal à ce plan.
Puisque $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ les droites (CD) et (AC) sont perpendiculaires en C, donc C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathscr{P}$.

c. Puisque $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, on sait que ses cordonnées sont dans l'ordre les coefficients a, b, c de x, y, z, soit :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x + 1y - 1z + d = 0$.
En particulier $C(2\,;\,-2\,;\,-1) \in \mathscr{P} \iff 2 \times 2 + 1 \times (-2) - 1 \times (-1) + d = 0 \iff 4 - 2 + 1 + d = 0 \iff d = -3$.
Finalement : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x + y - z - 3 = 0$.

2. **a.** On a grâce aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$, $CD^2 = 4+1+1 = 6$, d'où $CD = \sqrt{6}$.

b. Puisque C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathscr{P}$, ce point est celui qui est à la plus courte distance du point D, soit $\sqrt{6}$: il n'existe donc pas d'autre point de $\mathscr{P}$ situé à cette distance $\sqrt{6}$ de D;

Ou encore : la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{6}$ est tangente en C au plan $\mathscr{P}$, donc quel que soit M dans $\mathscr{P}$, le triangle DCM est rectangle en C, d'hypoténuse [DM] et l'on sait qu'alors $DM > DC = \sqrt{6}$: tout point M du plan aurez que C est donc à une distance supérieure à $\sqrt{6}$ de D.

3. **a.** Si $M(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à Δ et à $\mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 2+t \\ z & = & -1+t \\ 2x+y-z-3 & = & 0 \end{array}\right., \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2\times 0+2+t-(-1+t)-3=0 \iff 0=0 : \text{ceci}$$

signifie que tout point de Δ appartient à $\mathscr{P}$ donc que Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ.

b. Un vecteur directeur de la droite Δ est $\delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et avec $H(0\,;\,2+t\,;\,-1+t)$, on a $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 3+t \\ 1+t \end{pmatrix}$.

Or $(DH) \perp \Delta \Rightarrow \delta \cdot \overrightarrow{DH} = 0 \iff 0+3+t+1+t=0 \iff 4+2t=0 \iff 2t=-4 \iff t=-2$.

On a donc $H(0\,;\,0\,;\,-3) \in \Delta$.

c. On a donc $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 3-2 \\ 1-2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; il en résulte que $DH^2 = 4^2+1^2+(-1)^2 = 18$.

Finalement $DH = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Exercice IV

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(-1\,;\,-3\,;\,2), \qquad B(3\,;\,-2\,;\,6) \quad \text{et} \quad C(1\,;\,2\,;\,-4).$$

1. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent donc un plan $\mathscr{P}$.

2. **a.** On a :
   - $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4\times 13+1\times(-16)+4\times(-9) = 52-16-36 = 52-52 = 0$;
   - $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\times 13+5\times(-13)+(-6\times(-9) = 26-65+54 = 52-52 = 0$.

   Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$: il est normal à ce plan.

   b. On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff ax+by+cz+d=0$ et que a, b et c sont les composantes d'un vecteur normal à ce plan donc par exemple $\vec{n}$.

   On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 13x-16y-9z+d=0$.

   par exemple $C(1\,;\,2\,;\,-4) \in \mathscr{P} \iff 13\times 1+2\times(-16)-9\times(-4)+d = 0+d = 0 \iff 13-32+36+d=0 \iff 17+d=0 \iff d=-17$.

   On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 13x-16y-9z-17=0$.

On note $\mathscr{D}$ la droite passant par le point F(15 ; −16 ; −8) et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. La droite $\mathscr{D}$ étant orthogonale au plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $\mathscr{P}$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{\text{F}M} = t\overrightarrow{n}, \quad t \in \mathbb{R}$, soit $\left\{\begin{array}{rcl} x-15 & = & 13t \\ y+16 & = & -16t \\ z+8 & = & -9t \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}$

4. Si E$(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à la droite $\mathscr{D}$ et au plan $\mathscr{P}$, ses coordonnées vérifient les équations de la droite et celle du plan donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-15 & = & 13t \\ y+16 & = & -16t \\ z+8 & = & -9t \\ 13x-16y-9z-17 & = & 0 \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans l'équation du plan, on obtient :

$13(13t+15)-16(16t-16)-9(-9t-8)-17=0 \iff 169t+195+256t+256+81t+72-17=0 \iff$
$506t+506=0 \iff t=-1.$

En reportant cette valeur dans les équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$, on obtient :

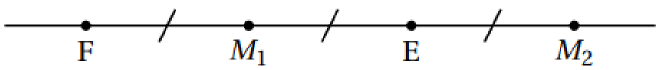
$$\left\{\begin{array}{lcl} x-15 & = & -13 \\ y+16 & = & 16 \\ z+8 & = & 9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Donc E(2 ; 0 ; 1)

5. F et E appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, donc la distance du point F au plan est égale à FE.

Or $\text{FE}^2 = (-13)^2+16^2+9^2 = 169+256+81 = 506$. D'où $\text{FE} = \sqrt{506}$.

6. Comme précédemment si $M \in \mathscr{D}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ la distance de ce point au plan $\mathscr{P}$ est ME.



- Premier point répondant à la question : M_1 tel que $\overrightarrow{\text{E}M_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}}$.

De $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$, on déduit que $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{\text{E}M_1}\begin{pmatrix} 6,5 \\ -8 \\ -4,5 \end{pmatrix}$, soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1-2 & = & 6,5 \\ y_1-0 & = & -8 \\ z-1 & = & -4,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 8,5 \\ y_1 & = & -8 \\ z & = & -3,5 \end{array}\right.$$

- Deuxième point répondant à la question : M_2 tel que $\overrightarrow{EM_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

De $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$, on déduit que $-\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EM_2}\begin{pmatrix}-6,5\\8\\4,5\end{pmatrix}$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_2-2 & = & -6,5 \\ y_2-0 & = & 8 \\ z_2-1 & = & 4,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & -4,5 \\ y_2 & = & 8 \\ z_2 & = & 5,5 \end{array}\right.$$

Donc $M_1(8,5\,;\,-8\,;\,-3,5)$ et $M_2(-4,5\,;\,8\,;\,5,5)$.

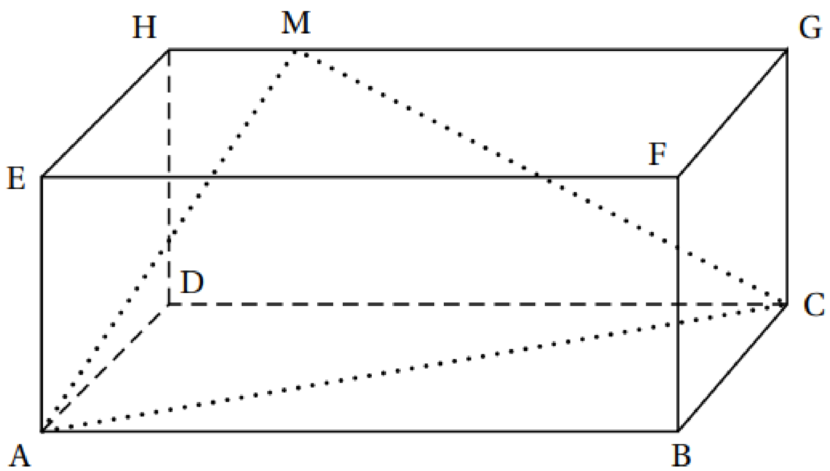
Exercice V

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que

AB = 5, AD = 3 et AE = 2.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées (5; 0; 0), (0; 3; 0) et (0; 0; 2).

Le repère est donc : $\left(A\,;\frac{1}{5}\overrightarrow{AB},\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point H a pour coordonnées $(0\,;3\,;2)$.
   $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point G a pour coordonnées $(5\,;3\,;2)$.

b. La droite (GH) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{HG}$ de coordonnées $(5\,;0\,;0)$.

De plus, elle passe par le point G donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5+5t \\ y &=& 3 \\ z &=& 2 \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

a. $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_M - 0 &=& 5k \\ y_M - 3 &=& 0 \\ z_M - 2 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_M &=& 5k \\ y_M &=& 3 \\ z_M &=& 2 \end{array}\right.$

Donc les coordonnées de M sont $(5k\,;\,3\,;\,2)$.

b. Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont celles de M donc : $(5k\,;\,3\,;\,2)$.

Les coordonnées de C sont $(5\,;3\,;0)$, donc celles de $\overrightarrow{CM}$ sont $(5k-5\,;3-3\,;2-0)$ soit $(5k-5\,;0\,;2)$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM} = 5k\times(5k-5)+3\times 0+2\times 2 = 25k^2-25k+4$

c. Le triangle AMC est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CM}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}$ ou encore $25k^2-25k+4=0$.

On résout cette équation. $\Delta = (-25)^2 - 4\times 25\times 4 = 225 = 15^2$

L'équation admet deux solutions $k' = \dfrac{25+15}{2\times 25} = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5}$ et $k'' = \dfrac{25-15}{2\times 25} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$

Donc pour $k = \dfrac{1}{5}$ ou $k = \dfrac{4}{5}$, le triangle AMC est rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1\,;3\,;2)$.

On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

3. On considère le point K de coordonnées $(1\,;3\,;0)$.

a. Le plan (ACD) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, donc il a pour équation cartésienne $z=0$.

b. $z_K = 0$ donc le point K appartient au plan (ACD).

$\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;-2)$, donc

- $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $\overrightarrow{MK}$ est orthogonal au plan (ACD), et donc que K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

c. Le volume du tétraèdre MACD est : $\dfrac{1}{3}\times$ Aire de ACD $\times$ MK.

$\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;-2)$, donc $MK = 2$.

Le triangle ACD est rectangle en D donc a pour aire $\dfrac{AD\times DC}{2} = \dfrac{3\times 5}{2} = \dfrac{15}{2}$.

Le volume du tétraèdre MACD est donc, en unités de volume : $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{15}{2}\times 2 = 5$.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).

Si on considère D comme sommet du tétraèdre MACD, la base est le triangle AMC, et la hauteur est DP.

Le triangle AMC est rectangle en M donc son aire est : $\dfrac{AM \times MC}{2}$.

$AM = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{14}$

$CM = \sqrt{(1-5)^2 + (3-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}$

L'aire de AMC vaut : $\dfrac{\sqrt{14} \times \sqrt{20}}{2} = \sqrt{70}$.

Le tétraèdre MACD a donc pour volume : $\dfrac{1}{3} \times \sqrt{70} \times DP$ soit : $\dfrac{DP\sqrt{70}}{3}$.

On sait que ce volume vaut 5, donc : $\dfrac{DP\sqrt{70}}{3} = 5$ donc : $DP = \dfrac{15}{\sqrt{70}} \approx 1{,}8$.

Exercice VI

1. a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $7 \times \dfrac{2}{7} = 2$ et $-4 \times \dfrac{2}{7} \neq 3$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent bien un plan dont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs.

b. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \times 7 + 16 \times (-4) + 29 \times 1 = 35 - 64 + 29 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2 + 16 \times 3 + 29 \times (-2) = 10 + 48 - 58 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

Si M a pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, alors $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x+1\,;\,y+1\,;\,z)$.

$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff 5(x+1) + 16(y+1) + 29z = 0 \iff 5x + 16y + 29z + 21 = 0$

Le plan (ABC) a pour équation $5x + 16y + 29z + 21 = 0$.

2. a. $AB^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 7^2 + (-4)^2 + 1^2 = 49 + 16 + 1 = 66$

$AC^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = 2^2 + 3^2 + (-2)^2 = 4 + 9 + 4 = 17$

$BC^2 = (1-6)^2 + (2+5)^2 + (-2-1)^2 = 25 + 49 + 9 = 83$

$66 + 17 = 83$ ce qui équivaut à $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

b. Le triangle ABC est rectangle en A donc son aire vaut $\dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{\sqrt{66} \times \sqrt{17}}{2} = \dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.

3. a. Les points A, B, C et S sont coplanaires si et seulement si le point S appartient au plan (ABC).

Le plan (ABC) a pour équation $5x + 16y + 29z + 21 = 0$.

$5x_S + 16y_S + 29z_S + 21 = 5 \times 13 + 16 \times 37 + 29 \times 54 + 21 = 1705 \neq 0$ donc $S \notin (ABC)$.

Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par S coupe le plan (ABC) en un point noté H.

La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{SH}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}$ donc le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées $(5k\,;\,16k\,;\,29k)$ où k est un réel. Si le point H a pour coordonnées $(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$, le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées $(x_H - 13\,;\,y_H - 37\,;\,z_H - 54)$.

On en déduit : $\left\{\begin{array}{rcl} x_H & = & 13 + 5k \\ y_H & = & 37 + 16k \\ z_H & = & 54 + 29k \end{array}\right.$

On exprime que H appartient au plan (ABC), ce qui va permettre de déterminer la valeur de k :

$$\begin{aligned} 5x_H + 16y_H + 29z_H + 21 = 0 &\iff 5(13 + 5k) + 16(37 + 16k) + 29(54 + 29k) + 21 = 0 \\ &\iff 65 + 25k + 592 + 256k + 1566 + 841k + 21 = 0 \\ &\iff 2244 + 1122k = 0 \iff k = -2 \end{aligned}$$

Donc le point H a pour coordonnées : $\left\{\begin{array}{rclcr} x_H & = & 13 + 5(-2) & = & 3 \\ y_H & = & 37 + 16(-2) & = & 5 \\ z_H & = & 54 + 29(-2) & = & -4 \end{array}\right.$

4. Le volume du tétraèdre SABC est $\dfrac{\text{aire(ABC)} \times SH}{3}$.

Le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées $(5k\,;\,16k\,;\,29k)$ donc $(5(-2)\,;\,16(-2)\,;\,29(-2)) = (-10\,;\,-32\,;\,-58)$. Donc $SH^2 = (-10)^2 + (-32)^2 + (-58)^2 = 4488$ et donc $SH = \sqrt{4488} = 2\sqrt{1122}$.

$\text{aire(ABC)} = \dfrac{\sqrt{1122}}{2}$ donc le volume du tétraèdre est $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1122}}{2} \times 2\sqrt{1122}}{3} = \dfrac{1122}{3} = 374$ unités de volume.