LAGODIÉ-GORLIER Rémy

DS n°6 mathématiques.

Exercice I :

Réponse. $\boxed{c}$: $y = -2$.

Exercice II : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$

1) Par limite de référence : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.
Donc par limite de somme : $\lim_{x \to -\infty} (e^x+1) = 1$.
Et par limite de produit : $\lim_{x \to -\infty} 2e^x = 0$.
Donc par limite de quotient : $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

Cela signifie que la droite d'équation : $y=0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

2) Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
Nous avons une forme indeterminé.
Or, $\frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(1+\frac{1}{e^x})} = \frac{2}{1+\frac{1}{e^x}} = f(x)$.
Par limite de reference : $\lim_{x \to +\infty} e^x = \infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} = 0$.
Donc par composition de limite : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.
Ainsi, par limite de somme et de quotient : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2}$

Ce qui montre bien que la droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

Exercice III :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (\cos(x)+5)e^{-x}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

$4 \leq \cos(x)+5 \leq 6$

$\boxed{4e^{-x} \leq f(x) \leq 6e^{-x}}$ car $\forall X \in \mathbb{R}$, $e^{X} > 0$

Or, par limite de produit : $\lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ et de référence $\lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0$

Donc par composition de limite : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

Ainsi, par limite de produit : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} 4e^{-x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} 6e^{-x}}$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (-x+1)e^{-x}$

a) Par limite de produit : $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et de référence : $\lim_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$

Donc par composition de limite : $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

Et par limite de somme : $\lim_{x\to-\infty} (-x+1) = +\infty$.

Donc par limite de produit : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}$

b) Nous avons une forme indéterminée

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-x+1)e^{-x} = \frac{-x+1}{e^{x}} = -\frac{x}{e^{x}} + \frac{1}{e^{x}} = g(x)$

Par limite de croissance comparée : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$ Donc par limite de produit : $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{e^{x}} = 0$

Par limite de référence : $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$.

Donc par composition de limite : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$

Ainsi, par limite de somme : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$

Exercice IV :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} (4-x) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} e^x = e^4$

Or, par limite de reference : $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X < 0}} \frac{1}{X} = -\infty$.

Donc par composition de limite : $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} \left(\frac{1}{4-x}\right) = -\infty$.

Ainsi, par limite de quotient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} \left(\frac{e^x}{4-x}\right) = -\infty}$

b) Nous avons une forme indeterminé.

Or, $\underline{\forall x \in \mathbb{R},}$ $2x^3 + x^2 + 1 = x^3\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$

Et par limite de reference : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \frac{1}{X} = 0$

Donc par composition de limite : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Par limite de somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 2$.

Donc par limite de produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)\right) = \boxed{-\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 + x^2 + 1)}$

c) Pour tout réel $x > 0$, $\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} = \frac{e^x}{x} \times e^x \times \sqrt{x}$.

Or par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc par limite de produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \times e^x \times \sqrt{x} = +\infty$, et par suite, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} = +\infty.}$

d) Nous avons une forme indeterminée.

Or, $\underline{\forall x \in \mathbb{R},}$ $\frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \frac{\cancel{x^2}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

Donc : $\sqrt{\frac{x^3+1}{x^2-x+1}} = \sqrt{\frac{x + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$

Par limite de reference : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$

$0 \leq \sin(x)\,\sin(x) \leq 1$

Donc par limite de quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$

Or, par limite de reference : $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Donc par composition de limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \right) = \boxed{+\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}}}$

<u>Exercice V :</u> $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x^2) - x + 7.$

a) $\forall X \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin(X) \leq 1.$

En posant $X = x^2$ car $x^2 \in \mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin(x^2) \leq 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 - x \leq \sin(x^2) - x \leq 1 - x$

$\boxed{6 - x \leq f(x) \leq 8 - x.}$

$8 - x \geq f(x).$

Or, par limite de somme et de produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} (8 - x) = -\infty$

Donc par comparaison de limite : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.}$

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ 6 - x \leq f(x).$

Et $\lim\limits_{x \to -\infty} (6 - x) = +\infty$. par somme de limite.

Donc par comparaison de limite : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$