Exercice 4

Partie A $\quad (E) : 11x + 111y = 1$.

1a) Pour $x = -10$ et $y = 1$, on a : $11 \times (-10) + 111 \times 1 = -110 + 111 = 1$, donc le couple $(-10 ; 1)$ est solution de (E).

1b) Soit $(x ; y)$ un couple solution de (E) : $11x + 111y = 1 = 11 \times (-10) + 111 \times 1$.

Donc $11x + 111y = 11 \times (-10) + 111 \times 1$

Donc $11x + 11 \times 10 = 111 \times 1 - 111 \times y$, donc $11(x+10) = 111(1-y)$. Comme $x \in \mathbb{Z}$, $x+10 \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, donc $1-y \in \mathbb{Z}$

Donc $111 \mid 11(x+10)$

De plus, $\text{pgcd}(11 ; 111) = \text{pgcd}(11 ; 111 - 10 \times 11) = \text{pgcd}(11 ; 1) = 1$.

Par suite : $\begin{cases} 111 \mid 11(x+10) \\ \text{et} \\ \text{pgcd}(111 ; 11) = 1 \end{cases}$, donc d'après le théorème de GAUSS, $111 \mid (x+10)$: il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x + 10 = 111k$

Donc $x = 111k - 10$, et par suite, $11(x+10) = 111(1-y)$ s'écrit : $11 \times 111k = 111(1-y)$ donc : $11k = 1 - y$

Donc $y = -11k + 1$.

Par suite $\mathcal{S}_{(E)} \subset \{(111k - 10 ; -11k + 1) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

Réciproquement : $\forall k \in \mathbb{Z}$, on a : $11(111k - 10) + 111(-11k + 1) = \cancel{11 \times 111k} - 110 - \cancel{11 \times 111k} + 111 = 1$.

Donc $(111k - 10 ; -11k + 1)$ est bien solution de (E).

Donc $\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \{(111k - 10 ; -11k + 1) ; k \in \mathbb{Z}\}}$.

Partie B

1a) N_p est impair car son chiffre des unités vaut 1, donc N_p n'est pas divisible par 2 !

De même, un entier est divisible par 5, si et seulement si, en base 10, son chiffre des unités est égal à 0 ou 5.

Ici, le chiffre des unités de N_p vaut 1, donc N_p n'est pas divisible par 5.

1b) p est pair. Si $p = 2$, alors $N_2 = 11$ est un nombre premier.

Si $p \geq 4$ (et p pair) : $N_p = \underbrace{1 \cdots\cdots 1}_{p = 2q \text{ chiffres}} = \underbrace{11.11.11 \cdots 11}_{q \text{ paquets de } 11 \text{ écrits côte à côte}} = 11 \times 10^{q-1} + 11 \times 10^{q-2} + \cdots + 11 \times 1$

$\exists q \in \mathbb{N}$ tq $p = 2q$

$$N_p = 11 \times \underbrace{(10^{q-1} + 10^{q-2} + \cdots + 1)}_{\text{somme d'entiers, donc entier}}$$

, donc N_p est divisible par 11 et comme il est strictement supérieur à 11, $\boxed{N_p \text{ n'est pas premier}}$.

Donc $\boxed{\text{Lorsque } p \text{ est pair, seul } N_2 \text{ est premier}}$.

Remarque : Si $p \geq 4$ est pair, la connaissance du critère de divisibilité par 11 permet de conclure instantanément aussi !

2) a) $10 \equiv 1 (3)$ car $10-1=9$ et 9 est divisible par 3.

Par compatibilité de la relation de congruence avec les puissances, on a : pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1^j$ (3)
et comme $1^j = 1$, on a : $\boxed{10^j \equiv 1 \ (3)}$.

b) $N_p = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k$. Or grâce à 2a), pour $k=0, \dots, k=p-1$, $10^k \equiv 1 (3)$.

Par suite, par compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, on a : $\sum_{k=0}^{p-1} 10^k \equiv \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} 1}_{\text{somme de } p \text{ termes tous égaux à } 1\text{, donc cette somme est égale à } 1\times p = p.} \ (3)$

Donc $\boxed{N_p \equiv p \ (3)}$

c) N_p est divisible par 3 si et seulement si $N_p \equiv 0 (3)$.

Or par 2b), $N_p \equiv p (3)$.

donc $3 | N_p \iff p \equiv 0 (3) \iff 3 | p$.

$\boxed{N_p \text{ est divisible par 3 si et seulement si } p \text{ est un multiple de 3.}}$

3a) $10^m \equiv a \ (7)$

m	0	1	2	3	4	5	6
a	1	3	2	-1	-3	-2	1

3b) $p \in \mathbb{N}^*$. On effectue la division euclidienne de p par 6 : il existe un unique couple d'entiers naturels $(q ; r)$ tel que :
$p = 6q + r$ et $0 \leq r < 6$.

Par suite, $10^p = 10^{6q+r} = (10^6)^q \times 10^r$

Or, $10^6 \equiv 1 (7)$ d'après 3a), donc $(10^6)^q \equiv 1 \ (7)$, donc $(10^6)^q \times 10^r \equiv 10^r \ (7)$.
donc $10^p \equiv 10^r (7)$.

Par suite, $10^p \equiv 1 (7)$ si et seulement si $10^r \equiv 1 (7)$. Vu que r est entier et que $0 \leq r < 6$, grâce au tableau du 3a), on a : $r = 0$.

Par suite, $p = 6q$ avec $q \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{10^p \equiv 1 (7) \text{ si et seulement si } p \text{ est un multiple de 6.}}$

3c) $N_p = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k = 1 + 10 + \dots + 10^{p-1}$: on est en présence de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $Q = 10$ et de premier terme 1, et il y a p termes dans la somme.

Vu que $10 = Q$ et que $10 \neq 1$, on a : $\boxed{N_p} = 1 \times \frac{1-Q^p}{1-Q} = \frac{1-10^p}{1-10} = \frac{1-10^p}{-9} = \frac{-(10^p-1)}{-9} = \boxed{\frac{10^p-1}{9}}$

somme des termes d'une suite géométrique de raison $Q \neq 1$ et de premier terme égal à 1.

3d)
Si 7 divise N_p, alors 7 divise tout multiple de N_p, en particulier, 7 divise $9N_p$.

Réciproquement, si $7 | 9N_p$: comme $\text{pgcd}(7 ; 9) = 1$, d'après le théorème de Gauss, 7 divise N_p.

Conclusion : $\boxed{\text{"7 divise } N_p \text{" équivaut à "7 divise } 9N_p\text{"}}$

3c) Grâce à 3d) : $7 | N_p \iff 7 | 9N_p$.

Or grâce à 3c), $9N_p = 10^p - 1$

donc : $7 | N_p \iff 7 | (10^p - 1) \iff 10^p - 1 \equiv 0\ (7) \iff 10^p \equiv 1\ (7) \overset{\text{question 3b)}}{\iff} 6 | p$

Ainsi, $\boxed{N_p \text{ est divisible par 7 si et seulement si } p \text{ est un multiple de 6}}$.

Partie C

1) $p \geq 2$ $\quad N_p = 11\ldots1 = \underbrace{11\ldots1}_{p-2 \text{ chiffres}}00 + 11 = \underbrace{11\ldots1}_{p-2 \text{ chiffres}} \times 100 + 11 = 11\ldots1 \times 5 \times 20 + 11$. D'après le théorème d'existence et d'unicité de la division euclidienne, comme $0 \leq 11 < 20$, le reste de la division euclidienne de N_p par 20 est égal à 11. (et le quotient vaut $11\ldots1 \times 5 = \underbrace{55\ldots5}_{p-2 \text{ chiffres}}$).

2)a) Si $n^2 \equiv 1\ (10)$, alors d'après le tableau fourni, $n \equiv 1\ (10)$ ou $n \equiv -1\ (10)$.

Si $n \equiv 1\ (10)$, alors il existe un entier k tel que $n = 10k + 1$, et par suite, $n^2 = (10k+1)^2 = 100k^2 + 20k + 1$.

Or $100 \equiv 0\ (20)$, donc $100k^2 \equiv 0\ (20)$
$20 \equiv 0\ (20)$, donc $20k \equiv 0\ (20)$, donc $100k^2 + 20k + 1 \equiv 0 + 0 + 1\ (20)$, donc $n^2 \equiv 1\ (20)$.

Si $n \equiv -1\ (10)$, alors il existe un entier λ tel que : $n = 10\lambda - 1$ et donc $n^2 = (10\lambda - 1)^2 = 100\lambda^2 - 20\lambda + 1$.
Vu que $100 \equiv 0\ (20)$ et $20 \equiv 0\ (20)$, on a également : $n^2 \equiv 1\ (20)$. Donc, $\boxed{\text{si } n^2 \equiv 1\ (10), \text{ alors } n^2 \equiv 1\ (20)}$

2b) S'il existait un entier naturel n tel que $N_p = n^2$, alors, comme $N_p \equiv 1\ (10)$, on aurait $n^2 \equiv 1\ (10)$ et donc, grâce à 2a), $n^2 \equiv 1\ (20)$.

Par suite on aurait : $N_p \equiv 1\ (20)$.

Or d'après la question 1), $N_p \equiv 11\ (20)$.

Par suite, on aboutirait à $1 \equiv 11\ (20)$ ce qui est absurde car 20 ne divise pas $11 - 1 = 10$.

En conclusion, il n'existe aucun entier naturel p supérieur ou égal à 2 tel que N_p soit un carré d'entier :

$\boxed{\text{Pour tout entier } p \geq 2,\ N_p \text{ n'est donc le carré d'aucun entier}}$