Exercice I

$$A(0;4;16),\quad B(0;4;-10),\quad C(4;-8;0)\quad \text{et}\quad K(0;4;3).$$

1. **a.** On a $CK^2 = (4-0)^2+(-8-4)^2+(0-3)^2 = 16+144+9 = 169 = 13^2$, donc $CK = 13 \iff C \in S$.

b. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-12\\-16\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-12\\10\end{pmatrix}$

D'où le produit scalaire : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 16+144-160 = 160-160 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires en C, donc le triangle ABC est rectangle en C.

2. **a.**
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 12-12+0 = 0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC} = 12-12+0 = 0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées sont égales mais pas les dernières), donc $\overrightarrow{n}$ normal deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est normal à ce plan.

b. On sait qu'alors les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan (ABC).

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(ABC) \iff 3x+y+d = 0$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Or par exemple :

$C(4\,;\,-8\,;\,0)\in(ABC) \iff 3\times4+(-8)+d = 0 \iff 12-8+d = 0 \iff d = -4$.

Finalement $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(ABC) \iff 3x+y-4 = 0$.

3. **a.** Si D appartient à l'axe des abscisses son ordonnée et sa cote sont nuls, donc D a pour coordonnées $(x\,;\,0\,;\,;0)$.

De plus $KD = 13 \Rightarrow KD^2 = 13^2 = 169 = (x-0)^2+(0-4)^2+(0-3)^2 \iff (x-0)^2+16+9 = 169 \iff \iff x^2 = 144 \iff x^2 = 12^2 \iff x^2-12^2 = 0 \iff (x+12)(x-12) = 0 \left\{\begin{array}{lcl} x-4+12 & = & 0\\ x-- & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+12 & = & 0\\ x-12 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -12\\ x & = & 12\end{array}\right.$

Conclusion $D(12;0;0)$.

b. Si la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) un de ses vecteurs directeurs est le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à ce plan. On a donc :

$M(x;\,y;\,z)\in\Delta \iff \overrightarrow{DM} = t\,\overrightarrow{n}$, avec $t\in\mathbb{R}$. Cette égalité se traduit par le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-12 & = & 3t\\ y-0 & = & 1t\\ z-0 & = & 0t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} x & = & 12+3t\\ y & = & t\\ z & = & 0t\end{array}\right..$$

c. D appartient à Δ perpendiculaire au plan (ABC) ; cherchons les coordonnées du projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) : I

I appartient au plan (ABC) et appartient à Δ, ses coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient donc l'équation du plan (ABC) et les équations paramétriques de Δ soit le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 12+3t \\ y & = & t \\ z & = & 0t \\ 3x+y-4 & = & 0 \end{array}\right.$$

En remplaçant dans la dernière équation x et y par leurs valeurs en fonction de t on obtient $3(12+3t)+t-4=0 \iff 36+9t+t-4=0 \iff 10t+32=0$

$\iff 10t=-32 \iff t=-\dfrac{32}{10}=-\dfrac{16}{5}$.

En reportant cette valeur dans les deux premières équations de Δ, on obtient :

$x=12-3\times\dfrac{16}{5}=\dfrac{60}{5}-\dfrac{48}{5}=\dfrac{12}{5}$; $y=-\dfrac{16}{5}$ et $z=0$.

$\mathrm{I}\left(\dfrac{12}{5}\ ;\ -\dfrac{16}{5}\ ;0\right)$.

On calcule $\mathrm{DI}^2=\left(\dfrac{12}{5}-12\right)^2+\left(-\dfrac{16}{5}-0\right)^2+0^2=\left(-\dfrac{48}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{16}{5}\right)^2=\dfrac{2304}{25}+\dfrac{256}{25}=$ $\dfrac{2560}{25}=\dfrac{256\times 10}{25}$.

Finalement $\mathrm{DI}=\sqrt{\dfrac{256\times 10}{25}}=\dfrac{16\sqrt{10}}{5}$.

En prenant la base (ABC) rectangle en C : son aire est donc égale à : $\dfrac{\mathrm{AC}\times\mathrm{BC}}{2}$.

A la question 1b), on a calculé les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ donc :

$\mathrm{AC}^2=16+144+256=416$; $\mathrm{AC}=\sqrt{416}$;

$\mathrm{BC}^2=16+144+100=260$; $\mathrm{BC}=\sqrt{260}$.

Donc $\mathscr{A}(\mathrm{ABC})=\dfrac{\sqrt{416}\times\sqrt{260}}{2}=52\sqrt{10}$

Donc avec $h=\dfrac{16\sqrt{10}}{5}$, on obtient :

$V=\dfrac{1}{3}\times 52\sqrt{10}\times\dfrac{16\sqrt{10}}{5}=\dfrac{1664}{3}\approx 554,7$ soit 555 à l'unité près.

Exercice II

---

a) $\boxed{n! + (n+1)!} = n! + n! \times (n+1) = n!(1+n+1) = \boxed{(n+2)n!}$

b) $\boxed{A} = \dfrac{2024! \times 7!}{11! \times 2023!} = \dfrac{2024 \times 2023! \times 7!}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7! \times 2023!} = \dfrac{2024}{11 \times 10 \times 9 \times 8} = \boxed{\dfrac{23}{90}}$

c) $n \geq 1$, $u_n = \ln((n^2-1)!) - \ln((n^2)!) = \ln\left(\dfrac{(n^2-1)!}{(n^2)!}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$u_n = -\ln(n^2) = -2\ln(n)$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$, et $-2 < 0$, donc par limite du produit, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$

Exercice III

a) Autant que de n-listes de l'ensemble $\{0 ; 1\}$, donc 2^n séquences en tout.
b) 2 ! Celle qui commence par pile : PFP…… et celle qui commence par face : FPF…..
c) Notons A l'événement : la séquence contient au moins deux piles.

Alors $\bar{A}$ est l'évènement : la séquence contient zéro pile ou un seul pile.

Or une seule séquence ne contient aucun pile, et n (1 parmi n) séquences contiennent un seul pile, donc $n+1$ séquences sont favorables à la réalisation de $\bar{A}$.

Donc d'après la question *a)* : $p(\bar{A}) = \frac{n+1}{2^n}$, et par suite, $p(\mathrm{A}) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{n+1}{2^n} = \frac{2^n - n - 1}{2^n}$.

Exercice IV

On doit piocher 5 numéros parmi les $49 - 5 = 44$ non sortis le 01/04.

donc $\binom{44}{5}$ possibles.

Et 1 numéro chance parmi les 9 non sortis le 01/04, donc 9 possibles.

Par principe multiplicatif, il y a donc $\binom{44}{5} \times 9$ tirages favorables ici, et toujours

$\binom{49}{5} \times 10$ tirages possibles en tout.

Notons p la probabilité de cet évènement : $p = \dfrac{\binom{44}{5} \times 9}{\binom{49}{5} \times 10} = \dfrac{\frac{44!}{5!39!} \times 9}{\frac{49!}{5!44!} \times 10}$

$$p = \frac{44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 \times 9}{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 10}$$

$p \simeq 0{,}513$ à 10^{-3} près.

Exercice V

Soit il n'y a aucun ex aequo, donc $4! = 24$ classements possibles des 4 personnes.

Soit il y a exactement deux ex aequo : on les choisit $\binom{4}{2} = 6$ façons, ils sont classés : $1^{er}-1^{er}$ ou 2^e-2^e ou 3^e-3^e

Pour $1^{er}-1^{er}$, on classe les deux autres joueurs (2 possibilités), idem si 2^e-2^e ou 3^e-3^e.

donc $\binom{4}{2} \times 2 \times 3 = 6 \times 6 = 36$ classements avec exactement deux ex aequo.

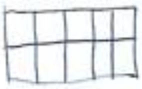
Soit il y a 2 fois deux ex aequo : $\binom{4}{2} = 6$ classements (autant que de façons de choisir les 2 ex aequo de tête)

Soit il y a 3 ex aequo : $\binom{4}{3} \times \binom{1}{1} \times \underbrace{2}_{\text{positions du non ex aequo : 1er ou 4e donc 2 choix}} = 4 \times 2 = 8$ tels classements.

Soit il y a 4 ex aequo : $\binom{4}{4} = 1$ tel classement.

Donc (union disjointe), il y a : $24 + 36 + 6 + 8 + 1 =$ <u>75 façons de classer 4 personnes avec d'éventuels ex aequo.</u>

Exercice VI



On a $\binom{10}{2}$ façons de gratter 2 cases parmi les 10 recouvertes d'argent :

$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ possibilités.

Il y a trois grattages favorables à gagner : gratter les deux cases $1€$, ou celles $2€$ ou celles $5€$.

En notant G l'événement : on gagne au grattage, $\underline{\underline{P(G) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}}}$

La probabilité de gagner à ce jeu est égale à $\frac{1}{15}$.

Exercice VII

1) ABEILLES est un mot de 8 lettres dont 2E et 2L et 4 autres lettres non répétées.

Plaçons les 2E : Autant de façons de faire que de placer 2 lettres sur 8 places disponibles donc $\binom{8}{2}$ possibles.

Plaçons ensuite les 2L : $\binom{6}{2}$ choix possibles (Il ne reste plus que $8-2=6$ places après avoir mis les 2E).

Puis reste à écrire sur les 4 places restantes, toutes les permutations possibles des lettres A, B, I, S donc $4!$ possibles.

Par principe multiplicatif, il y a : $\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times 4! = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times 24 = 28 \times 15 \times 24 = \underline{10080}$ anagrammes du mot ABEILLES.

2) □ □ □ □ □ □ □

(26 lettres des alphabet) "Milieu"

On écrit 3 lettres quelconques dans les 3 premières places (cela fixe de façon unique les 3 dernières places).
On écrit une lettre quelconque au milieu (lettre située en 4ème position, lue de gauche à droite ou de droite à gauche).

donc on a $\underline{26^4 \text{ palindromes de 7 lettres avec l'alphabet usuel}}$ c'est-à-dire $\underline{456976 \text{ palindromes}}$.

3) Distinguons les cas n pair et n impair :

*) Si n est impair, alors $n=2p+1$ avec p entier.

$$\underbrace{\square\square\square\cdots\square}_{p \text{ chiffres}} \ \underset{\text{Milieu}}{\square} \ \underbrace{\square\square\square\cdots\square}_{p \text{ chiffres}}$$

Similairement à q.2), on a : $2^p \times 2 = 2^{p+1}$ palindromes à n chiffres pris dans $\{0,1\}$ si n impair.

Or $n=2p+1$, donc $p=\frac{n-1}{2}$ et $p+1=\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$, donc $\boxed{2^{\frac{n+1}{2}} \text{ palindromes si } n \text{ impair.}}$

**) Si n est pair : $n=2p$ où $p\in\mathbb{N}^*$.

$\square\square\square\cdots\cdots\square\square\square$ On a 2^p palindromes à n chiffres dans ce cas là

c'est-à-dire $\boxed{2^{\frac{n}{2}}}$ palindromes si n est pair.

On peut voir qu'il y a donc $2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ palindromes à n chiffres où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la partie entière.

Exercice VIII

On doit effectuer en tout 10 déplacements (7 horizontaux, 3 verticaux) pour aller du départ à l'arrivée.

Cela revient donc à dénombrer le nombre de parties $\underset{\text{à 3 éléments}}{}$ d'un ensemble E de cardinal 10.

Donc $\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!\,3!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{7!\times6}=\underline{120 \text{ chemins en tout : affirmation vraie}}$.

Rq : On pouvait aussi dire que c'est $\binom{10}{7}$: 7 déplacements horizontaux au cours des 10 déplacements

Exercice IX

D'abord on prend 3 filles parmi les 90 : $\binom{90}{3}$ choix possibles.

Puis on les classe (= permute) : donc $3!$ façons de faire.

On classe ensuite les 157 autres candidats : $157!$ façons.

Il y a en tout $160!$ façons de classer ces 160 candidats (autant que de permutations d'un ensemble à 160 éléments).

D'où en notant F = " Le trio de tête est formé de 3 filles ".

$$P(F) = \frac{\text{Nb de cas favorables à } F}{\text{Nb total de cas}} = \frac{\binom{90}{3}\times 3!\times 157!}{160!} = \frac{\frac{90!}{3!\times 87!}\times 3!\times 157!}{160!}$$

$$P(F) = \frac{90\times 89\times 88}{160\times 159\times 158} \qquad \boxed{P(F)\approx 0{,}18 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$$

Exercice X

1) Il y a 26 lettres dans l'alphabet.

Les initiales d'un individu est un couple de l'ensemble E des 26 lettres de l'alphabet.

Il y a donc $26^2 = 676$ couples (= 2-listes) d'initiales possibles.

Donc dès qu'un lycée a au moins $676+1 = 677$ élèves, on est sûr d'en trouver au moins deux qui ont les mêmes initiales (c'est le principe des tiroirs)

2) $$N = \underbrace{\binom{6}{1}}_{\text{Nb de parties de E à un élt}} + \overbrace{\binom{6}{3}}^{\text{Nb de parties de E à 3 élts}} + \binom{6}{5} = 6 + \frac{6!}{3!\times 3!} + 6 \qquad \text{Car } \binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$$

$$N = 2\times 6 + \frac{\cancel{6}\times 5\times 4}{\cancel{6}} = 12+20 = \boxed{32 \text{ parties de E ont un cardinal impair}}$$

Exercice XI

a) $10^6 = 1000000$ (Autant que de sixlistes de l'ensemble E des chiffres).

b) On place ces deux 0 : $\binom{6}{2} = 15$ choix des places des deux 0.

Reste ensuite à placer dans 4 cases des chiffres autres que 0 : 9^4 choix possibles (l'ordre compte).

Donc $N = 15\times 9^4 = 98415$ codes à 6 chiffres avec exactement deux 0.

c) 1987** ; *1987* ; **1987 : 3 façons de positionner la séquence 1987 sur six positions.

Reste à écrire deux caractères **, donc $10^2 = 100$ possibles.

Par le principe multiplicatif, on a $3\times 100 = 300$ codes à 6 chiffres contenant la séquence 1987.

d) Le code peut avoir : soit trois fois un même chiffre parmi 1, 9, 8, 7 et une fois et une seule chaque autre chiffre

donc : $4 \times \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{Places des trois chiffres répétés}} \times \underbrace{3!}_{\text{Permutations des autres chiffres.}} = 4 \times 20 \times 6 = 480$ tels codes.

Choix du chiffre répété trois fois $\binom{4}{1} = 4$.

soit deux fois un chiffre répété deux fois (<u>ex</u> : 997718)

On choisit une paire d'éléments de $\{1;9;8;7\}$: $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles.

Chacun des éléments de cette paire va être répété deux fois au sein du code PIN.

Plaçons les 1er chiffres répétés 2 fois : $\binom{6}{2} = 15$ placements possibles.

Puis on place les 2 autres chiffres répétés : $\binom{4}{2} = 6$ placements possibles.

Enfin, il reste à permuter les deux éléments restant (non répétés) ; donc $\times 2!$.

Par principe multiplicatif : $6 \times 15 \times 6 \times 2 = 1080$ codes ont deux fois un chiffre répété et chacun des chiffres étant 1, 9, 8 ou 7.

Par principe additif, on a : $N = 480 + 1080 = 1560$ tels codes.

---

e) Aucun chiffre pair : 5^6

Au moins un chiffre pair : $\underbrace{10^6}_{} - 5^6$ (principe additif, union disjointe).

Aucun chiffre pair / Au moins un pair

q.a) 10^6 codes

donc <u>984375 codes PIN à 6 chiffres ont au moins un chiffre pair.</u>

f) On veut donc : $\underbrace{(\text{4 chiffres pairs et 2 impairs})}_{(*)}$ ou $\overbrace{(\text{5 pairs et 1 impair})}^{(**)}$ ou $\underbrace{\text{6 pairs}}_{(***)}$.

union disjointe

$(*)$: $\binom{6}{2} \times 5^2 \times \binom{4}{4} \times 5^4 = 15 \times 5^6$

$(**) = \binom{6}{1} \times 5 \times \binom{5}{5} \times 5^5 = 6 \times 5^6$

$(***) = 5^6$

<u>Total</u> : $15 \times 5^6 + 6 \times 5^6 + 5^6 = 5^6(15 + 6 + 1) = 22 \times 5^6 =$ <u>343750 codes PIN à six chiffres ayant plus de chiffres pairs qu'impairs.</u>

g) Aucun chiffre pair répété signifie : soit aucun chiffre pair, soit un seul chiffre pair, soit exactement deux chiffres pairs distincts, soit 3 chiffres pairs deux à deux distincts, soit 4 chiffres pairs deux à deux distincts, soit 4 chiffres pairs deux à deux distincts, soit 5 chiffres pairs deux à deux distincts.

-Codes ayant aucun chiffre pair : 5^6=15625 tels codes (on place que des impairs sur 6 places, donc 6 listes formées à partir de l'ensemble {1 ;3 ;5 ;7 ;9}.

-Codes ayant un seul chiffre pair : on choisit le chiffre pair (5 choix possibles), on place ce dernier, 6 choix possibles, puis on écrit une 5-liste de chiffres impairs dans les 5 places restantes, donc $5\times6\times5^5=6\times5^6$=93750 tels codes possibles.

-Codes ayant deux chiffres pairs distincts : on choisit deux chiffres pairs parmi {0 ;2 ;4 ;6 ;8} donc $\binom{5}{2}$ choix de la paire de chiffre pair, puis on arrange ces deux chiffres pairs sur 6 places ($6\times5=30$ possibles), et enfin sur les 4 places restantes on écrit une 4-liste d'impairs, donc 5^4 possibles.

Par principe multiplicatif, on a : $\binom{5}{2}\times30\times5^4$=107500 codes à six chiffres avec exactement deux chiffres pairs distincts.

-Codes ayant trois chiffres pairs distincts deux à deux : même type de dénombrement que précédemment : $\binom{5}{3}\times6\times5\times4\times5^3$=150000.

-Codes ayant quatre chiffres pairs distincts deux à deux : même type de dénombrement que précédemment : $\binom{5}{4}\times6\times5\times4\times3\times5^2$=45000 tels codes.

-Codes ayant cinq chiffres pairs distincts deux à deux : même type de dénombrement que précédemment : $\binom{5}{5}\times6\,!\,\times5$=3600 tels codes.

Enfin d'après le principe additif on a en tout : 15625+93750+107500+150000+45000+3600 = 415475 codes à 6 chiffres n'ayant aucune répétition de chiffres pairs.

h) Il y a autant de parties de E contenant l'élément a que de parties d'un ensemble de cardinal un de moins que E, c'est-à-dire de cardinal $n-1$, donc 2^{n-1} telles parties.
Or au total il y a 2^n parties de E.
Donc $2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$ parties de E ne contiennent pas l'élément a : Ainsi on a bien autant de parties de E qui contiennent l'élément a que de parties de E ne contenant pas l'élément a.