Exercice I

$C(1;1;0)$; $F(0;1;1)$

$H(1;0;1)$ $G(1;1;1)$, donc comme K est le milieu de $[HG]$, $K\left(\frac{1+1}{2};\frac{0+1}{2};\frac{1+1}{2}\right)$

$K\left(1;\frac{1}{2};1\right)$

$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$. $\frac{y_{\overrightarrow{CF}}}{y_{\overrightarrow{CK}}}=\frac{0}{-\frac{1}{2}}=0$ et $\frac{z_{\overrightarrow{CF}}}{z_{\overrightarrow{CK}}}=\frac{1}{1}=1$.

Or $0\neq 1$, donc $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CK}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles.

$\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CK}$ ne sont pas colinéaires, donc les points C, F, K ne sont pas alignés et définissent donc un unique plan : le plan (CFK).

1a) (d) passe par $A(0;1;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige (d), donc une R.P de (d) est :

$$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=4+t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$

1b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige (d) et par lecture de la R.P donnée de (d'), $\vec{u'}\begin{pmatrix}5\\2\\-9\end{pmatrix}$ dirige (d').

Or $\frac{x_{\vec{u'}}}{x_{\vec{u}}}=\frac{5}{1}=5$ et $\frac{y_{\vec{u'}}}{y_{\vec{u}}}=\frac{2}{-1}=-2$. Or $5\neq -2$, donc $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires, et par suite, (d) et (d') ne sont pas parallèles.

1-c) (d) et (d') ne sont pas parallèles donc soit elles sont sécantes ou non coplanaires.

Etudions l'intersection de (d) et (d') :

Soit $M(x ; y ; z)$

$M \in (d) \cap (d') \iff \exists (t ; t') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = t = -1 + 5t' \\ y = 1 + t = 2 + 2t' \\ z = 4 + t = 3 - 9t' \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} t = 5t' - 1 \\ 2t' = -1 - (5t' - 1) \\ -9t' = 1 + 5t' - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5t' - 1 \\ 2t' = -5t' \\ -9t' = 5t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$

Système compatible Bien !

Donc : $\boxed{\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}}$

Ainsi les droites (d) et (d') sont sécantes et se coupent au point $M(-1 ; 2 ; 3)$

2) Par lecture de la R-P donnée, $\vec{w}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ dirige (Δ), et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (d).

Or $\vec{w} = -4\vec{u}$, donc $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc (d) et (Δ) sont parallèles.

$A(0;1;4) \in (d)$. Montrons que $A \notin (\Delta)$:

$A(0;1;4) \in (\Delta) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} 0 = 9 - 4\lambda \\ 1 = 2 + 4\lambda \\ 4 = 13 - 4\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{9}{4} \\ \lambda = -\frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{9}{4} \end{cases}$: absurde car $\frac{9}{4} \neq \frac{1}{4}$!

Donc $A \notin (\Delta)$, par suite (d) et (Δ) sont strictement parallèles.

Exercice II

<u>Question 1</u> : réponse A : M(-3 ; -4 ; 6).

<u>Question 2</u> : réponse C : $\frac{7}{25}$

La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\frac{7}{10}$ **b.** $\frac{3}{25}$ **c.** $\frac{7}{25}$ **d.** $\frac{24}{125}$

$P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{25}$ **Réponse c.**

Question 3 : réponse B : $\frac{1}{3}$

La probabilité $P_B(G)$ de l'évènement G sachant que B est réalisé est égale à :

a. $\frac{1}{5}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{7}{15}$ **d.** $\frac{5}{12}$

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

D'après la formule des probabilités totales : $P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G)$ donc $P(B \cap G) = P(G) - P(A \cap G) = \frac{12}{25} - \frac{7}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

$P_B(G) = \frac{P(B \cap G)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$ **Réponse b.**

Question 4 : réponse C : 0,188.

$P(X=6) = \binom{10}{6} \times \left(\frac{12}{25}\right)^6 \times \left(1 - \frac{12}{25}\right)^{10-6} \approx 0,188$ **Réponse c.**

Question 5 : réponse C : (AC) et (SB).

Question 6 : réponse B.

$D(0;-1;0)$ $S(0;0;1)$, donc K = Milieu de $[SD]$ a pour coordonnées : $K\left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$C(1;0;0)$ donc L = Milieu de $[SC]$ a pour coordonnées : $L\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$.

Enfin, N = Milieu de $[KL]$ a pour coordonnées : $N\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ Réponse $\boxed{B}$

Question 7 : réponse C.

(AS) est dirigée par $\vec{AS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et passe par $S(0;0;1)$ donc $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (AS) : Réponse $\boxed{C}$

Question 8 : réponse A : u ⩽ 10.

Exercice III

1. **a.** Déterminons la limite de la fonction g en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = \lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x+3 = +\infty$

Par limite de somme, on en déduit finalement : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

b. Pour la limite de la fonction g en $+\infty$, sous la forme actuelle, on a une forme indéterminée.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = 2x \times \left(3 \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} - 1 - \dfrac{3}{2x}\right)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.

Or, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{y}}{y} = +\infty$, d'après la propriété des croissances comparées.

Par limite de produit, somme et quotient, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} - 1 - \dfrac{3}{2x} = +\infty$.

Finalement, par limite du produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. **a.** Soit x un nombre réel :

$g'(x) = 3 \times 2 \times \mathrm{e}^{2x} - 2 \times 1 - 0 = 6\mathrm{e}^{2x} - 2$.

On arrive bien à l'expression annoncée.

b. Résolvons l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned}
g'(x) > 0 &\iff 6\mathrm{e}^{2x} - 2 > 0\\
&\iff 6\mathrm{e}^{2x} > 2\\
&\iff \mathrm{e}^{2x} > \frac{1}{3} \qquad \text{car } 6 > 0\\
&\iff 2x > \ln\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\\
&\iff 2x > -\ln(3)\\
&\iff x > \frac{-1}{2}\ln(3)
\end{aligned}$$

La fonction g' est donc à valeurs strictement positives sur $\left]\dfrac{-1}{2}\ln(3)\,;\,+\infty\right[$ et à valeurs strictement négatives sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{-1}{2}\ln(3)\right[$ (en résolvant une inéquation similaire).

c. On en déduit le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Calculons l'image de $\dfrac{-1}{2}\ln(3)$:

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{-1}{2}\ln(3)\right) &= 3 \times \mathrm{e}^{2\frac{-1}{2}\ln(3)} - 2 \times \frac{-1}{2}\ln(3) - 3 = 3\mathrm{e}^{-\ln(3)} + \ln(3) - 3 = 3\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{3}} + \ln(3) - 3\\
&= 3 \times \frac{1}{3} + \ln(3) - 3 = \ln(3) - 2
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\ln(3)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3)-2$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g admet bien un minimum égal à $\ln(3)-2$, atteint pour $x = -\dfrac{1}{2}\ln(3)$.

3. **a.** Calculons l'image de 0 par g :
$g(0) = 3\mathrm{e}^{2\times 0} - 2\times 0 - 3 = 3 - 0 - 3 = 0$.
On a $g(0) = 0$, donc $x = 0$ est bien solution de l'équation $g(x) = 0$.

b. Le nombre $\ln(3) - 2$ est strictement négatif, donc :

- Sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ln(3)\,;\,+\infty\right[$, où g est strictement croissante, on a $g(0) = 0$, donc $x = 0$ est la seule solution à l'équation $g(x) = 0$ sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\ln(3)\right]$, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante. De plus, 0 est une valeur intermédiaire entre $+\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \ln(3) - 2 < 0$.
  D'après le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\ln(3)\right]$.

Finalement, l'équation admet donc bien exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$: 0 et α.
Un balayage à la calculatrice donne $-1{,}5 < \alpha < -1.4$, pour un encadrement au dixième près.

4. Des variations de g et de la question précédente, on déduit que g est à valeurs strictement positives sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$, et à valeurs strictement négatives sur $]\alpha\,;\,0[$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. La question posée sous-entend que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on a :

   $f(x) = 3\times\mathrm{e}^{3x} - 2\times\mathrm{e}^{x} - (2x+1)\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\times\left(3\mathrm{e}^{2x} - 2 - 2x - 1\right) = \mathrm{e}^{x} g(x)$.

   On arrive bien à l'expression demandée.

2. La fonction exp est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de g.

   Avec la question **4.** de la **Partie A**, on peut donc établir que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$, car sur ces intervalles, sa fonction dérivée est strictement positive, et elle est strictement décroissante sur $[\alpha\,;\,0]$.

3. La fonction f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$, car si elle l'était alors sa fonction dérivée f' serait croissante sur $\mathbb{R}$. Or on a vu que la fonction f' est à valeurs positives sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ puis à valeurs strictement négatives sur $]\alpha\,;\,0[$. On a donc notamment : $f'(-2) > 0$ et $f'(-1) < 0$, ce qui prouve que la fonction f' n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ et donc que f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV

$\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}$ dirige (BC), donc $\frac{1}{6}\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige (BC), donc comme (BC) passe par $C(3;0;9)$, une R-P de (BC) est : $\begin{cases} x = 3 \\ y = -t' \\ z = 9 + t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

(Δ) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ par lecture de la R-P donnée.

Donc (Δ) et (BC) non parallèles vu que $\vec{u}$ et $\frac{1}{6}\vec{BC}$ non colinéaires ($x\vec{u} = 1$ et $\frac{x}{6}\vec{BC} =$

Étudions l'intersection de (Δ) et (BC) :

$M(x;y;z) \in (\Delta)\cap(BC) \iff \exists (t,t') \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases} x = 5+t = 3 \\ y = 3-t = -t' \\ z = -1+3t = 9+t' \end{cases}$

$M(x;y;z) \in (\Delta)\cap(BC) \iff \begin{cases} t = -2 \\ t' = t-3 = -2-3 = -5 \\ -1+3\times(-2) = 9+(-5) \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ t' = -5 \\ -7 = 4 \text{ : absurde.} \end{cases}$

Ainsi $(\Delta)\cap(BC) = \emptyset$

Vu que (Δ) et (BC) ne sont pas parallèles, il en résulte que (Δ) et (BC) ne sont pas coplanaires.