Exercice I

1a) (u_n) est géométrique avec $u_0 = 1$ et $q = \frac{3}{4}$.

donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

$u_n \leqslant 10^{-3} \iff \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 10^{-3} \iff \ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \leqslant \ln(10^{-3}) \iff n\ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant -3\ln(10)$.

Or $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$ car sur $]0;1]$, ln prend des valeurs négatives.

donc $u_n \leqslant 10^{-3} \iff n \geqslant \frac{-3\ln(10)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$. avec $\frac{-3\ln(10)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 24{,}012$ (calculatrice).

Donc c'est à partir du rang $n_0 = 25$ que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

2) $f(x) = \ln\left(x + 2e^{-3x}\right) = \ln(u(x))$ avec : $\begin{cases} u(x) = x + 2e^{-3x} \\ u'(x) = 1 + 2\times(-3)e^{-3x} = 1 - 6e^{-3x} \end{cases}$

Donc $\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1-6e^{-3x}}{x+2e^{-3x}}}$

3)

$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x} = 2 \times \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$.

Or, par limite de référence du cours : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

donc par limite de produit et de somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

L'axe des abscisses (d'équation $y = 0$) est donc asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

Exercice II

1) $a=\ln(9)+\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\ln\left(\frac{1}{9}\right)$

$a=\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ car $\ln\left(\frac{1}{9}\right)=-\ln(9)$

$a=\ln(\sqrt{3})-\ln(3)=\frac{1}{2}\ln(3)-\ln(3)$

$\underline{a=-\frac{1}{2}\ln(3)}$

$\boxed{\text{Réponse d}}$

2) $x>0$ et $f(x)=4\ln(3x)$.

$f(2x)=4\ln(3\times 2x)=4\ln(2\times 3x)$

$f(2x)=4(\ln(2)+\ln(3x))=4\ln(2)+4\ln(3x)=4\ln(2)+f(x)=\ln(2^4)+f(x)=f(x)+\ln(16)$

Réponse b : $\underline{f(2x)=f(x)+\ln(16)}$

3) Condition d'existence : $\ln(x+3)$ existe si et seulement si $x+3>0$ c'est-à-dire si $x>-3$.

$\ln(x+1)$ existe si et seulement si $x+1>0$ donc $x>-1$.

On résout donc sur $I=]-1;+\infty[$. (Ce qui exclut la solution a).

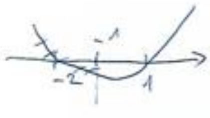
$\ln(x+3)<2\ln(x+1) \iff \begin{cases} x>-1 \\ e^{\ln(x+3)}<e^{2\ln(x+1)} \end{cases} \iff \begin{cases} x>-1 \\ x+3<(x+1)^2 \end{cases}$

Car $e^{2a}=(e^a)^2$.

$\iff \begin{cases} x>-1 \\ x+3<x^2+2x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-1 \\ \underbrace{x^2+x-2}_{} >0 \end{cases}$

trinôme ayant pour racines évidentes 1 et -2.

$\underline{S=]1;+\infty[\text{, réponse b}}$



Remarque : à la question 2) la réponse a) de l'énoncé était également correcte, on ne peut que déplorer le manque de rigueur des concepteurs de sujets, qui affirment qu'il y a une seule bonne réponse alors que deux convenaient ici……

Exercice III

1. Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=1$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

2. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. En utilisant le formule de la dérivée d'un produit, $\forall x\in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}=\ln(x)+1$

b. $f'(x)\geqslant 0 \iff \ln(x)+1\geqslant 0 \iff \ln(x)\geqslant -1 \iff x\geqslant e^{-1}$.

Dans le tableau : $f(e^{-1})=e^{-1}\ln\left(e^{-1}\right)+1=-e^{-1}+1=1-e^{-1}>0$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	↘	$1-e^{-1}$	↗	$+\infty$

c. $f(1)=1$. D'après les variations de la fonction f,

- $\forall x \in]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}]$, $f(x) \in [1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1[$;
- $\forall x \in [\mathrm{e}^{-1}\,;\,1]$, $f(x) \in [1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1]$.

Donc $\forall x \in]0\,;\,1]$, $f(x) \in [1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1]$. Or $1-\mathrm{e}^{-1} > 0$ donc $f(x) \in]\,0;\,1]$ pour tout réel x dans $]0\,;\,1]$.

3. **a.** L'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :
$y = f'(1)(x-1)+f(1)$
Avec $f'(1)=1$ et $f(1)=1$, on en déduit l'équation de (T) : $y = x-1+1 = x$

b. Nous savons que $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \ln(x)+1$.
La fonction f' est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, donc f est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. La courbe représentative d'une fonction convexe est toujours au-dessus de toutes ses tangentes. Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (T). Donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant x$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0\,;\,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrons par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout entier naturel n.
Initialisation : $u_0 \in]0\,;\,1]$ (par définition).
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 1$. Montrons que $0 < u_{n+1} < 1$.
D'après la question **2.c**, $x \in]0\,;\,1[$, $f(x) \in]0\,;\,1[$.
Or d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in]0\,;\,1[$, donc $f(u_n) \in]0\,;\,1[$ soit $u_{n+1} \in]0\,;\,1[$.
Conclusion : La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle au rang suivant $n+1$; d'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

b. D'après la question **3.c**, pour tout réel x positif, $f(x) > x$.
De plus pour tout entier naturel n, $u_n > 0$
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n$ donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée l.

Exercice IV

Partie A

1. On lit sur le graphique : $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$ (nombre dérivé égal au coefficient directeur de la droite (AB)).

2. **a.** Comme $a \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0$, on a $ax^2 \geqslant 0$, donc $ax^2+1 \geqslant 1 > 0$: la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{2ax}{ax^2+1}$.

   b. Les résultats du 1. peuvent s'écrire :
$$\left\{\begin{array}{lcl} f(1) & = & 3 \\ f'(1) & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \ln(a+1)+b & = & 3 \\ \dfrac{2a}{a+1} & = & 1 \end{array}\right. .$$
La deuxième équation donne $2a = a+1 \iff a = 1$ et en reportant dans la première :
$\ln(1+1)+b = 3 \iff b = 3-\ln 2$.
On a donc sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln 2$.

Partie B

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) = +\infty$.

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$, donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$

Par suite (somme), $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

1.

2.

Comme $x^2 + 1 > 0$ quel que soit le réel x, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Le dénominateur étant supérieur à zéro le signe de $f('x)$ est donc celui de $2x$, donc : $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Conclusion f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le nombre $f(0) = \ln 1 + 3 - \ln = 3 - \ln 2$ est donc le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3-\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3.

D'après le tableau de variations l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions si $k > 3 - \ln 2$.

4.

$f(x) = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2+1) + 3 - \ln(2) = 3 + \ln(2) \iff \ln(x^2+1) = 2\ln(2) \iff \ln(x^2+1) = \ln 4 \iff x^2 + 1 = 4$ (par croissance de la fonction logarithme), soit $x^2 = 3$, d'où deux solutions $S = \left\{-\sqrt{3}\,;\, \sqrt{3}\right\}$.

5.

On étudie le signe de la dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

Un calcul facile de dérivée de quotient conduit facilement à : $\boldsymbol{f''(x) = \frac{2(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}}$.

Or pour tout réel x, $(x^2+1)^2 > 0$ et $2 > 0$, donc $f''(x)$ a le même signe que $-x^2 + 1$.

Par suite, $f''(x) \geqslant 0$ équivaut à $1 \geqslant x^2$, c'est-à-dire $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Donc f est convexe sur $[-1\ ;\ 1]$, concave sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ -1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$.