

Exercice I

$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$
 a) $\boxed{-2\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}; \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}}$; $2\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{2\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}}$
 b) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 3 \times (-4) = 2 + 12 = \boxed{14}$

Exercice II

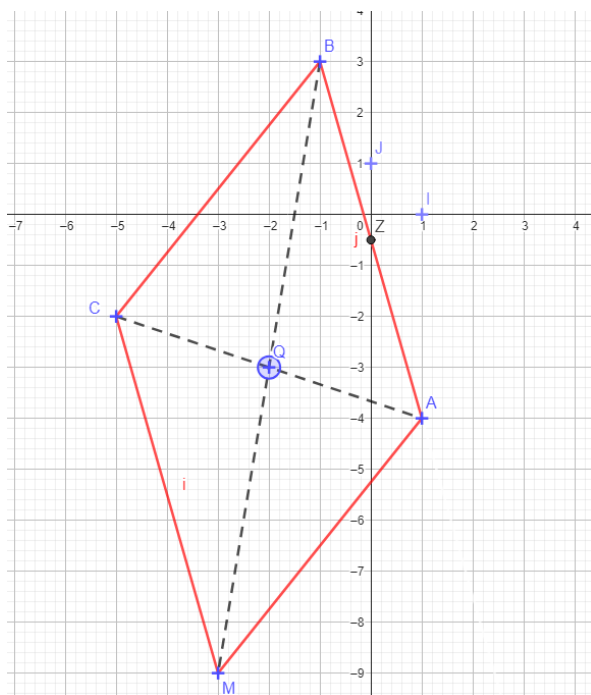
Exercice II
 1) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2x \\ x-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x & -2 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix} = 0$
 $\Leftrightarrow 2x \times 5 - (x-1) \times (-2) = 0$
 $\Leftrightarrow 10x + 2(x-1) = 0$
 $\Leftrightarrow 10x + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 12x = 2$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ $J = \left\{ \frac{1}{6} \right\}$.
 $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires si } x = \frac{1}{6}}$

2) Si les vecteurs sont égaux, alors ils sont en particulier colinéaires, et d'après la question précédente, $x = \frac{1}{6}$.

Dans ce cas, on aurait : $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$ et : $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas égaux vu qu'ils n'ont pas les mêmes coordonnées.

Donc il n'existe aucune valeur de x pour laquelle les vecteurs \vec{u} et \vec{v} soient égaux.

Exercice III



$$a) \vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A = -1 - 1 = -2 \\ y_B - y_A = 3 - (-4) = 7 \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} -5 - (-1) = -4 \\ -2 - 3 = -5 \end{pmatrix}, \text{ donc } \boxed{\vec{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}}$$

$\vec{AB} \neq \vec{BC}$ car ce sont deux vecteurs n'ont pas les mêmes coordonnées.

$$b) \det(\vec{AB}; \vec{BC}) = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -2 \times (-5) - 7 \times (-4) = 10 + 28 = 38.$$

Or $38 \neq 0$, donc $\det(\vec{AB}; \vec{BC}) \neq 0$, donc \vec{AB} et \vec{BC} ne sont pas colinéaires, donc A, B, C ne sont pas alignés.

$$c) \vec{CD} \begin{pmatrix} -9 - (-9) = -9 + 9 = 0 \\ 12 - (-2) = 14 \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{\vec{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix}} \text{ et } \boxed{\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

Par suite, $\vec{CD} = 2\vec{AB}$, donc \vec{CD} et \vec{AB} sont colinéaires, donc (AB) et (CD) sont parallèles.

d) $Z(x_Z; y_Z)$. Or Z appartient à l'axe des ordonnées, donc son abscisse est nulle: $x_Z = 0$.

$$Z(0; y_Z).$$

De plus, $Z \in (AB)$, donc A, Z et B sont alignés, ce qui revient à dire que \vec{AZ} et \vec{AB} sont colinéaires.

$$\text{Or } \vec{AZ} \begin{pmatrix} 0 - 1 = -1 \\ y_Z - (-4) = y_Z + 4 \end{pmatrix} = \vec{AZ} \begin{pmatrix} -1 \\ y_Z + 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$A, Z \text{ et } B \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \det(\vec{AZ}; \vec{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ y_Z + 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$-1 \times 7 - (y_Z + 4) \times (-2) = 0$$

$$-7 + 2(y_Z + 4) = 0$$

$$-7 + 2y_Z + 8 = 0$$

$$2y_Z + 1 = 0,$$

$$y_Z = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{donc } \boxed{Z(0; -\frac{1}{2})}$$

e) Soit $M(x; y)$: $\begin{matrix} A & B \\ M & C \end{matrix}$

$ABCM$ est un pgm équilatéral: $\vec{AB} = \vec{MC}$.

Or, $\vec{AB} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix} \right)$ et $\vec{MC} \left(\begin{smallmatrix} -5-x \\ -2-y \end{smallmatrix} \right)$.

Les vect, $\vec{AB} = \vec{MC}$ équivaut à: $\begin{cases} -2 = -5-x \\ 7 = -2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5+2 = -3 \\ y = -2-7 = -9 \end{cases}$

donc $M(-3; -9)$

f) Q est le centre du pgm $ABCM$, donc Q est le milieu de $[AC]$ car les diagonales d'un pgm se coupent en leur milieu.

donc $Q \left(\frac{xA+xC}{2}; \frac{yA+yC}{2} \right) = Q \left(\frac{1+(-5)}{2}; \frac{-4+(-4)}{2} \right) = Q(-2; -3)$

Exercice IV

o) $E =$ "piocher la boule numéro 4" est un événement élémentaire

$F =$ "piocher une boule portant un numéro pair" n'est pas un événement élémentaire.

1) $A = \{9; 19\}$ $P(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$.

$B = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$ $P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$

(on est ici en situation d'équiprobabilité sur l'ensemble des issues).

2) $\bar{B} =$ "le numéro de la boule piochée n'est pas un multiple de 3".

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$.

3) $A \cap B =$ "La boule piochée porte un numéro qui se termine par 9 ET ce numéro est un multiple de 3".

$A \cap B = \{9\}$ donc $P(A \cap B) = \frac{1}{20} = 0,05$

4) $A \cup B =$ "La boule piochée finit par 9 ou son numéro est un multiple de 3".

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,1 + 0,3 - 0,05 = 0,35$

5) on cherche ici: $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. Or $\bar{A} \cap \bar{B}$ est l'événement contraire de $A \cup B$, donc:

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,35 = 0,65$