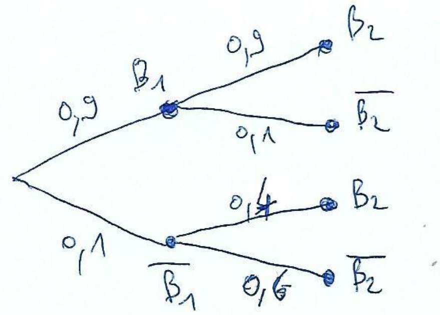
Exercice I

1a) $u_1 = p(B_1) = 0{,}9$ d'après l'énoncé car au départ la trottinnette est en bon état !

1b)

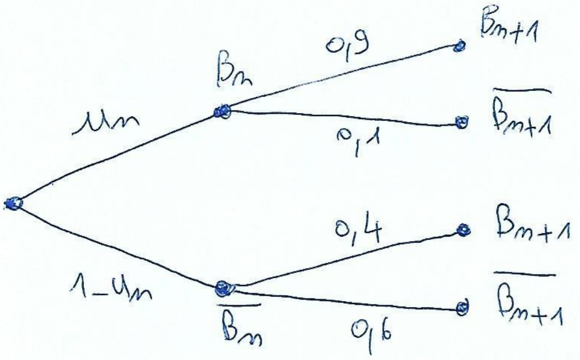
b)



$u_2 = p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p(\overline{B_1} \cap B_2)$ d'après la formule des probabilités totales.

$\boxed{u_2} = 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}81 + 0{,}04 = \boxed{0{,}85}$

2)



3) $u_{n+1} = p(B_{n+1}) = p(B_n \cap B_{n+1}) + p(\overline{B_n} \cap B_{n+1})$ (f. p. totales)

$u_{n+1} = p(B_n) \times p_{B_n}(B_{n+1}) + p(\overline{B_n}) \times p_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$

$u_{n+1} = u_n \times 0{,}9 + (1-u_n) \times 0{,}4$

$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 0{,}4 - 0{,}4u_n$

$\boxed{u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}4.}$

4) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - 0{,}8$, donc :

$V_{n+1} = U_{n+1} - 0{,}8 \overset{(I-3)}{=} 0{,}5U_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5U_n - 0{,}4$

$V_{n+1} = 0{,}5(V_n + 0{,}8) - 0{,}4$ car $V_n = U_n - 0{,}8$ donc $U_n = V_n + 0{,}8$

$V_{n+1} = 0{,}5V_n + 0{,}5 \times 0{,}8 - 0{,}4 = 0{,}5V_n + 0{,}4 - 0{,}4$

$V_{n+1} = 0{,}5V_n$, donc (V_n) est bien une suite géométrique de raison

$q = 0,5$. Son premier terme est $\boxed{V_0} = u_0 - 0,8 = 1 - 0,8 = \boxed{0,2}$

b) Puisque (V_n) est géométrique on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \; V_n = V_0 \times q^n = 0,2 \times 0,5^n$.

Or, $\boxed{u_n} = 0,8 + V_n = \boxed{0,8 + 0,2 \times 0,5^n}$

c) On trouve sans peine que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0,8$.

A long terme, la probabilité que la trottinette fonctionne tend à se stabiliser à 0,8.

d) Il a raison !

$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^n$.

Or $0,2 > 0$, $0,5 > 0$ donc $0,2 \times 0,5^n > 0$ et par suite, $u_n > 0,8$.

Or $\frac{3}{4} = 0,75$, et $0,8 > 0,75$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n > 0,75$.

5a) Il trouve le plus petit entier n à partir duquel $u_n \leqslant 0,85$, c'est à dire le nombre de semaines depuis sa mise en service pour que la probabilité que la trottinette fonctionne soit inférieure ou égale à 0,85.

b) A la main :

u	1	$0,9 = 0,5 \times 1 + 0,4$	$0,5 \times 0,9 + 0,4 = 0,85$
n	0	1	2
Condition $u > 0,85$	Vraie	Vraie $(0,9 > 0,85)$	Faux : $0,85 > 0,85$

Donc l'algo. affichera 2 en sortie.

Exercice II

Attention aux unités, ici en dizaine de millier !

1) $\boxed{u_0 = 1}$ (Il a 10.000 abeilles au départ et 10.000 = 1 dizaine de milliers).

2) u_n = nb d'abeille, au bout de la $n^{\text{ième}}$ année, exprimé en dizaine de millier

On a : $u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{\text{ce qu'il y a en bout de n années}} - \underbrace{\frac{20}{100} \times u_n}_{\text{abeilles mortes}} + \underbrace{1}_{\text{rajout de une dizaine de millier d'abeilles.}}$

$$u_{n+1} = u_n - 0{,}2u_n + 1$$

$$\boxed{u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1}$$

3)

n	0	1	2	3	10	50
u_n	1	1,8	2,44	2,952	4,57	4,9999

i) Il semblerait que la suite (u_n) soit strictement croissante.

ii) Il semblerait que la suite (u_n) converge vers 5 (i.e) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

4a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = u_n - 5$.

$V_{n+1} = u_{n+1} - 5$ avec $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{V_{n+1}} = 0{,}8u_n + 1 - 5 = 0{,}8u_n - 4 = 0{,}8\left(u_n - \frac{4}{0{,}8}\right) = 0{,}8(\underbrace{u_n - 5}_{V_n}) = \boxed{0{,}8\,V_n}$.

Donc la suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$.

Son premier terme $\boxed{V_0} = u_0 - 5 = 1 - 5 = \boxed{-4}$

4b) (V_n) est géométrique, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times q^n = -4 \times 0{,}8^n$.

or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = u_n - 5$, donc $\boxed{u_n} = 5 + V_n = \boxed{5 - 4 \times 0{,}8^n}$.

4c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1} - (5 - 4 \times 0{,}8^n) = 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1} - 5 + 4 \times 0{,}8^n$

$u_{n+1} - u_n = 4 \times 0{,}8^n - 4 \times 0{,}8^{n+1} = 4(0{,}8^n - 0{,}8^{n+1}) = 4(0{,}8^n \times 1 - 0{,}8^n \times 0{,}8)$

$u_{n+1} - u_n = 4 \times 0{,}8^n \times (1 - 0{,}8) = 4 \times 0{,}8^n \times 0{,}2 = 0{,}8 \times 0{,}8^n = 0{,}8^{n+1}$

or $0{,}8 > 0$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0{,}8^{n+1} > 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est donc strictement croissante.

4d) A très long terme, la population d'abeilles tend à se stabiliser à 5 dizaines de milliers d'individus (50.000 abeilles).

5)

```python
def grosseruche():
    n=0
    while 5-4*0.8**n<=3:
        n=n+1
    return (n)
```

L'algorithme affiche 4 en sortie. On s'aide de sa machine à calculer en faisant une table de valeurs de la suite (u_n).

L'apiculteur doit donc attendre 4 ans pour que le nombre d'abeilles de sa ruche dépasse les 30000 individus.

Exercice III

Réponse B :

Pour les algorithmes C et D on les exclut d'emblée, car on ne donne pas la valeur initiale stockée dans la variable S, donc l'algo va bugger.

L'algorithme A ne fait pas la somme des termes contenus dans S, il va seulement afficher le dernier terme de cette somme, à savoir 1/100.

Par élimination, c'est la réponse B.