Exercice I

(u_n) est une suite géométrique avec $u_0 = 5$ et $q = \frac{3}{4}$.

donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Ainsi, $u_n \leqslant 10^{-8} \iff 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 10^{-8} \iff \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant \frac{10^{-8}}{5}$

$u_n \leqslant 10^{-8} \iff \ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \leqslant \ln\left(\frac{10^{-8}}{5}\right)$ car $\ln$ croît sur $]0 ; +\infty[$

$u_n \leqslant 10^{-8} \iff n \ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant \ln\left(\frac{10^{-8}}{5}\right) \iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{10^{-8}}{5}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$ car

sur $]0 ; 1[$, $\ln$ est à valeurs négatives donc $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$.

Avec la machine : $\dfrac{\ln\left(\frac{10^{-8}}{5}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \simeq 69,6$

Or $n \in \mathbb{N}$, donc le plus petit entier n_0 à partir duquel $u_n \leqslant 10^{-8}$ est $n_0 = 70$.

Exercice II

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x).$$

1. • Limite en 0 : On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$, que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

• Limite en $+\infty$: en écrivant $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln(x) = -\infty$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - 2\ln(x) = -\infty$ et enfin par produit de limites :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour tout réel de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 2x - 4x\ln(x) - 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x)$.

3. Puisque $x \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $\ln(x)$.
On sait que $\ln(x) < 0$ sur $[0 ; 1[$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 1[$ et que
$\ln(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1 ; +\infty[$.
La fonction f est donc :

- croissante sur $[0; 1]$ de 1 à $f(1) = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 0 = 2$;
- décroissante sur $[1 ; +\infty[$ de 2 à moins l'infini.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4.

-f est continue sur [1 ; +∞[car dérivable sur cet intervalle.

-f est strictement décroissante sur [1 ; +∞[.

- 0 appartient à l'intervalle]-∞ ; 2], donc 0 est une valeur intermédiaire pour f.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α, avec $\alpha \in [1 ; +\infty[$.

Comme $f(\mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2(1 - 2\ln \mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2(1-2) = 1 - \mathrm{e}^2 \approx -6,4$.
En appliquant le même théorème, on a donc $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

5. On part de l'intervalle $[1; 2,7]$, (avec $\mathrm{e} \approx 2,7$) `dichotomie(1)` donne par dichotomie un encadrement de α par deux réels a et b tels que $b - a \leqslant 10^{-1}$.
Comme $\alpha \approx 1,9$, C et D sont exclus et A ne donne pas un encadrement au dixième : reste la proposition B.

Remarque ***: à la question*** **1)*****, doit clairement apparaître : par croissances comparées pour la recherche de la limite en*** **0.**

Exercice III

① $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$

$a = \cancel{\ln(9)} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \cancel{\ln(9)} = -\ln(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}\ln(3)$

$\boxed{\text{Question ① : Réponse (d) : } -\frac{1}{2}\ln(3)}$

② $x > 0$ et $f(x) = 4\ln(3x)$

$f(2x) = 4\ln(6x) = 4\ln(2 \times 3x) = 4\left(\ln(2) + \ln(3x)\right) = \underline{4\ln(2)} + \underbrace{4\ln(3x)}_{f(x)}$

$f(2x) = \underline{\ln(2^4)} + f(x) = \ln(16) + f(x)$

$\boxed{\text{Question ② : Réponse (b) : } f(2x) = f(x) + \ln(16)}$

Remarque : il y avait aussi la réponse A de juste, vu que : $ln(24) - ln(3/2) = ln(24/(3/2)) = ln(16)$!

Le concepteur de l'exercice aurait pu se relire….

③ $x > 1$ et $g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$

En $+\infty$: $g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{x-1} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (C. Comparées) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ---

Donc A.S.H d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

Plus difficile : montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = 1$:

$x > 1$ donc $x = 1+h$, avec $h > 0$.

Ainsi, $g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(1+h)}{1+h-1} = \frac{\ln(1+h)}{h}$

or $\ln$ est dérivable en 1, donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = (\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = 1$.

Pas d'ASV donc !

Réponse ⓒ : Pas d'ASV et une ASH.

Remarque : Avec la calculatrice, tracez C_g sinon et la réponse tombe directement !!

4) $f(x) = \ln(1+e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{-\frac{1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{-1}{e^x+1}$.

$f''(x) = -1 \times \frac{-(e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ vu que $e^x > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$.

Question ④ : réponse ⓑ : f est CONVEXE sur $\mathbb{R}$.

5) $(\ln(x))^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$, $x > 0$.

Posons $Y = \ln(x)$: $\underbrace{Y^2 + 10Y + 21 = 0}_{\text{a deux solutions :}}$ $\Delta = 10^2 - 4 \times 21 = 16$

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{-10-4}{2} = -7 \\ Y_2 = \frac{-10+4}{2} = -3 \end{cases}$$

donc $\ln(x) = -7$ ou $\ln(x) = -3$

$x = e^{-7}$ ou $x = e^{-3}$: $S = \{e^{-7} ; e^{-3}\}$.

Question ⑤ : Réponse ⓒ : 2 solutions.

Attention, ici la calculatrice (tracé du graphe) vous induisait en erreur car les solutions sont très proches de 0, donc non décelables sans zoomer longtemps !!!

Exercice IV

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

1. $\ln u$ est défini si $u > 0$, soit $1 + x > 0 \iff x > -1$.

   La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

2. En posant $u(x) = 1 + x$ et donc $u'(x) = 1$, on a alors si $f'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u(x)} = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.

3. **a.** On sait que $1 + x > 0$, donc le signe de la dérivée est celui de x :
   - $f'(x) = 0 \iff x = 0$;
   - $f'(x) > 0 \iff x > 0$: la fonction est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$;
   - $f'(x) < 0 \iff x < 0$; la fonction est décroissante sur $]-1\,;\,0[$.

   b. La fonction f est décroissante sur $]-1\,;\,0[$ puis croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle a donc un minimum en $x = 0$, $f(0) = 0 - 0 = 0$.
   Son minimum étant nul, on a donc sur $]-1\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

4. **a.** On sait que quel que soit le réel x, $x = \ln \mathrm{e}^x$. On peut donc écrire :
   $f(x) = \ln \mathrm{e}^x - \ln(1 + x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right)$ par propriété de la fonction logarithme népérien :
   $\ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$

   b. En posant $u = 1 + x \iff x = u - 1$, on a $f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{u-1}}{u}\right) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^u \times \mathrm{e}^{-1}}{u}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{e}^u}{u}\right)$.

   Or $x \to +\infty \implies x + 1 = u \to +\infty$ et on sait que $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$, donc $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{e}^u}{u}\right) = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

1. Avec $n = 0$, la relation de récurrence donne : $u_1 = u_0 - \ln(1 + u_0) = 10 - \ln(1 + 10) = 10 - \ln 11 \approx 7,602$.

2. *Initialisation* : on a $u_0 = 10 \geqslant 0$: l'inégalité est vraie au rang 0.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 0$: d'après la question **3. a.** la fonction est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, et $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 0$, donc $0 \leqslant u_{n+1}$: l'inégalité est vraie au rang $n + 1$.

   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence :

   pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.

3. On a $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n) \iff u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n)$.

   Or on vient de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0 \implies 1 + u_n \geqslant 1$ puis par croissance de la fonction logarithme népérien $\ln(1 + u_n) \geqslant \ln 1$, soit $\ln(1 + u_n) \geqslant 0 \iff -\ln(1 + u_n) \leqslant 0$.

   Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ montre que la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0 converge vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 0$

5. On a $u_{n+1} = f(u_n)$. On a vu que cette fonction est dérivable donc continue sur $]-1\,;\,+\infty[$; de plus la suite (u_n) converge vers ℓ, donc à la limite :

   $\ell = \ell - \ln(1 + \ell) \iff \ln(1 + \ell) = 0$ ou $\ln(1 + \ell) = \ln 1 \iff 1 + \ell = 1 \iff \ell = 0$.

   Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

<u>Remarque</u> : la récurrence est rédigée de façon trop elliptique.