Première Maths Groupe 4 | Corrigé du DS8 | Mars 2023

Exercice I

1) Pour tout entier naturel n, $U_n = -3n+4$.

a) $\boxed{U_7} = -3\times7+4 = -21+4 = \boxed{-17}$

Le terme de rang 2 de cette suite est : $\boxed{U_2} = -3\times2+4 = -6+4 = \boxed{-2}$

b) Le 35^{ième} terme de cette suite, qui est définie à partir du rang 0, est $\underline{U_{34}}$.

Or $\boxed{U_{34}} = -3\times34+4 = -102+4 = \boxed{-98}$

c) Pour tout entier naturel n : $U_{n+1} - U_n = \underline{-3(n+1)+4} - (-3n+4)$.

$U_{n+1} - U_n = -3n-3+4+3n-4 = -3$

Donc $U_{n+1} = U_n + 3$.

Donc la suite (U_n) est arithmétique de raison $R=3$.

2) Pour tout entier naturel $n\neq0$: $V_n = 2n^2-2n+1$.

a) ⚠ Ici (V_n) est définie à partir du rang 1, son premier terme est donc V_1 !

$\boxed{V_1} = 2\times1^2-2\times1+1 = \boxed{1}$ $\quad V_3 = 2\times3^2-2\times3+1 = 2\times9-6+1$

$\boxed{V_2} = 2\times2^2-2\times2+1 = \boxed{5}$ $\quad \boxed{V_3} = 18-6+1 = \boxed{13}$

b) $\boxed{V_{n+1}} = 2(n+1)^2-2(n+1)+1 = 2(n^2+2n+1)-2n-2+1 = 2n^2+4n+2-2n-1 = \boxed{2n^2+2n+1}$.

Exercice II

$\boxed{U_0=2}$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = U_n-(n+1)^2$ $(*)$.

a) Pour $n=0$ dans $(*)$: $\boxed{U_1} = U_0-(0+1)^2 = 2-1^2 = \boxed{1}$

Pour $n=1$ dans $(*)$: $\boxed{U_2} = U_1-(1+1)^2 = 1-2^2 = 1-4 = \boxed{-3}$

Ainsi on a les trois premiers termes de cette suite : $U_0=2$; $U_1=1$; $U_2=-3$.

b) $\boxed{U_9} = \boxed{-283}$

c) Au vu de la question a), et d'une table de valeurs de (U_n), il semblerait que (U_n) soit une suite strictement décroissante.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - (n+1)^2$

Donc $u_{n+1} - u_n = -(n+1)^2$.

Or pour tout entier naturel n, $n+1 \geqslant 1 > 0$, donc $(n+1)^2 > 0$, donc $-(n+1)^2 < 0$.

Par suite, on a, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n < 0$, donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante}}$.

Exercice III

a) $u_0 = 65$ (= nombre de clients en Mars 2019).

b) u_1 = nombre de clients en Avril 2019.

Selon ce modèle : $\boxed{u_1} = \frac{80}{100} \times u_0 + 18 = 0{,}8 \times 65 + 18 = 52 + 18 = \boxed{70}$.

c) De même qu'en b) :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{u_{n+1}} = \frac{80}{100} \times u_n + 18 = \boxed{0{,}8\, u_n + 18}$

d) u_n = nombre de clients n mois après Mars 2019.

Entre Mars 2019 et ~~Mars~~ 2023 il se sera écoulé $n = 4 \times 12 + 3 = 51$ mois.

On cherche donc à la machine la valeur de u_{51} où (u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 65 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \ u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 18. \end{cases}$$

on obtient : $u_{51} \approx 90$: En Juin 2023, il peut espérer avoir environ 90 clients.

e) Non car manifestement, à long terme, le nombre de clients tend à se stabiliser à 90, et $90 < 2 \times 65$!

Exercice IV

a) $\boxed{S} = 7 + 14 + \cdots + 770 + 777 = \boxed{\sum_{k=1}^{111} 7k}$.

b) $S = 7\underbrace{(1 + 2 + \cdots + 110 + 111)} = 7 \times \underbrace{\sum_{k=1}^{111} k}$

↳ Somme de Gauss
de type : $1 + 2 + \cdots + n$ avec ici $n = 111$ (111 termes dans la somme)

$\boxed{S} = 7 \times \frac{111 \times (111+1)}{2} = \frac{7 \times 111 \times 112}{2} = 7 \times 111 \times 56 = \boxed{43512}$

Rappel : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice V

a) Pour tout entier naturel n : $u_n = n^2 - 5n$, donc :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - 5(n+1)$$
$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 = n^2 - 3n - 4.$$

Donc par la méthode de la différence : $u_{n+1} - u_n = n^2 - 3n - 4 - (n^2 - 5n) = n^2 - 3n - 4 - n^2 + 5n$

$$u_{n+1} - u_n = 2n - 4$$

Étudions le signe de $2n-4$: $2n - 4 \geq 0 \iff 2n \geq 4 \iff n \geq 2$.

Donc pour tout entier $n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$: $\boxed{(u_n) \text{ croît à partir du rang } 2}$.

b) Pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{0,4^n}{5}$.

$0,4 > 0$, donc $0,4^n > 0$, donc comme $5 > 0$, $\frac{0,4^n}{5} > 0$ (règle des signes).

Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n > 0$: on peut donc utiliser la méthode des quotients :

Pour tout entier naturel n, $\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n}} = \frac{\frac{0,4^{n+1}}{5}}{\frac{0,4^n}{5}} = \frac{0,4^{n+1}}{5} \times \frac{5}{0,4^n} = \frac{0,4^{n+1}}{0,4^n} = 0,4^{n+1-n} = \boxed{0,4}$

Or $0,4 < 1$, donc $\boxed{(v_n) \text{ est strictement décroissante}}$.

Exercice VI

1) (u_n) est arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ et $u_5 = 16$ et $u_{31} = 94$.

Donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nR$, où R est la raison de cette suite.

$u_5 = 16 \iff u_0 + 5R = 16$
$u_{31} = 94 \iff u_0 + 31R = 94$, donc : $94 - 16 = u_0 + 31R - (u_0 + 5R)$

$$78 = 26R$$
$$\boxed{R} = \frac{78}{26} = \boxed{3}.$$

De plus, $\boxed{u_0} = 16 - 5R = 16 - 5\times 3 = 16 - 15 = \boxed{1}$.

Donc l'affirmation $\boxed{1}$ est fausse. ($u_0 = 1$ et $1 \neq 4$).

2) Pour tout entier naturel n, $u_n = 3n + 1$ d'après la question précédente.

$u_n > 129 \iff 3n + 1 > 129 \iff n > \frac{128}{3}$. Or $\frac{128}{3} \approx 42,7$ et $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geq 43$: Affirmation 2 Vraie.

Exercice VII

⚠ Ici (U_n) est définie à partir du rang 1. Il y a donc $n-1$ tours de boucle à faire pour partir de U_1, arriver à U_n.


```
def terme u(n):
    u = 1
    for i in range(1, n) :      ou encore for i in range(n)
        u = 2*u + 1
    return u
```

Rappel : for i in range (1, n) signifie : $1 \leq i < n$ avec i entier.
donc au total, i prend les valeurs successives $1, 2, ..., n-1$ soit $n-1$ valeurs.

Autre possible : for i in range (0, n-1)

Exercice VIII

Soit (U_n) la température des gâteaux, n minutes après leur sortie de congélateur.
On a : $U_0 = -19$ et $U_{10} = 1,3$.
(U_n) est une suite arithmétique vu qu'on suppose constante la vitesse de décongélation.

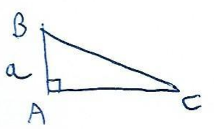
$R = \frac{1,3-(-19)}{10} = \frac{20,3}{10} = 2,03$ = concrètement, avec ce modèle la température des gâteaux augmente de $2,03°$ par minute.

donc pour tout entier n : $U_n = U_0 + R \times n = -19 + 2,03n$.

Par suite : $\boxed{U_{25}} = -19 + 2,03 \times 25 = -19 + 50,75 = \boxed{31,75°}$

25 min après leur sortie du congélateur, les gâteaux auraient une température de $31,75°C$.
Ce modèle est aberrant, car la température des gâteaux dépasserait celle de l'air ambiant ($25°C$) au bout de 25 minutes par exemple !

Exercice IX



Soit r un réel positif. Si AB, AC et BC sont en progression arithmétique, on aurait : $AB = a$
$AC = a + r$
$BC = a + 2r$ (⚠ BC est la plus grande longueur (hypoténuse)).

Or ABC est rectangle en A équivaut à : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

5

Donc : $(a+2r)^2 = a^2 + (a+r)^2$

$$\cancel{a^2} + 4ar + 4r^2 = \cancel{a^2} + a^2 + 2ar + r^2$$

$$4ar + 4r^2 - a^2 - 2ar - r^2 = 0.$$

$3r^2 + 2ar - a^2 = 0.$ Comme $a>0$ est fixé, on a une équation du 2^{nd} degré en la variable r :

$$\Delta = (2a)^2 - 4\times 3\times(-a^2)$$

$$\Delta = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2 = (4a)^2.$$

$\Delta > 0$, donc ce trinôme a <u>deux racines</u> :
$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-2a-4a}{6} = -a \quad (<0) \\ r_2 = \dfrac{-2a+4a}{6} = \dfrac{2a}{6} = \dfrac{a}{3}. \end{cases}$$

Par suite, comme $a>0$, $\boxed{r = \dfrac{a}{3}}$

et $AB = a$; $\boxed{AC = a + r = a + \dfrac{a}{3} = \dfrac{4a}{3} \ ; \ BC = a + 2r = a + \dfrac{2a}{3} = \dfrac{5a}{3}}$

<u>Donc oui les trois côtés de ce triangle peuvent être en progression arithmétique</u> ! (de raison $\dfrac{a}{3}$).

C'est le cas lorsque $AB = a$; $AC = \dfrac{4a}{3}$ et $BC = \dfrac{5a}{3}$