Terminale Maths Groupe 3 **Corrigé du DS7** **Décembre 2023**

Exercice I

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. **a.** D'après le cours, la limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

b. On cherche la limite de f en 0 :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

Donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$.

3. Pour déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^1}{1} = \mathrm{e}$

On établit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit m un nombre réel. On cherche, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Cela revient à chercher le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = m$.

D'après le tableau de variations :

- si $m < \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;
- si $m = \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$;
- si $m > \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.

On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

a. La tangente en a est parallèle à la droite Δ si et seulement si le coefficient directeur de la tangente est égal à -1, autrement dit quand $f'(a) = -1$.

$$f'(a) = -1 \iff \frac{\mathrm{e}^{a}(a-1)}{a^2} = -1 \iff \mathrm{e}^{a}(x-1) = -a^2 \iff \mathrm{e}^{a}(x-1) + a^2 = 0$$

ce qui veut dire que le nombre a est solution de l'équation $\mathrm{e}^{x}(x-1) + x^2 = 0$.

On note g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{x}(x-1) + x^2$.

On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. $g'(x) = \mathrm{e}^{x} \times (x-1) + \mathrm{e}^{x} \times 1 + 2x = x\mathrm{e}^{x} + 2x$

Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$, $x\mathrm{e}^{x} + 2x \geqslant 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$g(0) = \mathrm{e}^{0}(0-1) + 0 = -1$

On dresse le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

c. On complète le tableau de variations de g :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique a sur $[0\,;\,+\infty[$, donc il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

<u>Remarque :</u> dans l'absolu, la rédaction de la question 4 nécessite, dans le cas où m > e, d'utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice II

Partie A

1. $f(0)=1$ et $f'(1)=0$.

2. $f'(x)=a\times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+(ax+b)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}=\left(a-\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}b\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}b+a\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

3. $f(0)=1 \iff (0+b)\,\mathrm{e}^{0}=1 \iff b=1$ donc $f(x)=(ax+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ et $f'(x)=\left(-\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}+a\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

$f'(1)=0 \iff \left(-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}+a\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=0 \iff \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}=0 \iff a=1$

Donc $a=b=1$; on en déduit que $f(x)=(x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ et que $f'(x)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=(x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

1. a. $f(x)=(x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}=\dfrac{2\frac{1}{2}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}=2\left(\dfrac{\frac{1}{2}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}\right)+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

b.
- On sait que $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{\mathrm{e}^{X}}=0$.

  On pose $X=\frac{1}{2}x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}X=+\infty$. On peut donc dire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}=0$.
- On sait que $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^{-X}=0$.

  On pose $X=\frac{1}{2}x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}X=+\infty$. On peut donc dire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}=0$.

On peut donc déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Ne pas oublier de dire par limites de fonctions composées à cette question.

2. $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

Or, pour tout x, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ qui s'annule et change de signe pour $x = 1$.

$f(0) = 1$; $f(1) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

On établit le tableau des variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

3. On complète le tableau de variations en plaçant le nombre 0,07 :

x	0		1		α		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$0{,}07$	$\searrow$	0

On en déduit que l'équation $f(x) = 0{,}07$ admet une solution unique dans $[0\ ;\ +\infty[$.

4. En utilisant la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 10{,}14$ ce qui donne 10 comme arrondi à l'unité.

5.

$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(x) \overset{9.2}{=} \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

Un calcul similaire de dérivée conduit sans peine à : $f''(x) = \frac{1}{4}(x-3)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$, donc $f''(x)$ a le même signe que $x-3$.

alors $f''(x) \geqslant 0 \iff x-3 \geqslant 0 \iff x \geqslant 3$.

Ainsi :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

f'' s'annule et change de signe lorsque $x=3$, donc $\mathcal{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, son point d'abscisse 3. Notons le A : $A(3\,;f(3))$ avec $f(3) = 4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$, donc $\boxed{A(3\,;4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})}$.

Exercice III

Partie A

a) $f(x) = x^2 + e^{-2x}$.

Par limites de référence : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par limite de composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$, et par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x) = -\infty$; $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc par composée et somme on a :

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

b) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

Rappel : $x \mapsto e^{u(x)}$ se dérive en $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

$f'(x) = 2x + (-2)e^{-2x}$

$\boxed{f''(x)} = 2 + (-2)\times(-2)e^{-2x} = 2 + 4e^{-2x} = \boxed{2(1+2e^{-2x})}$

c) $2>0$; $1>0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$, donc $f''(x) > 0$ par produit et somme de nombres positifs.

Donc par critère de convexité, $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$.

Par suite, $\boxed{f' \text{ croît sur } \mathbb{R}}$ (caractérisation de la convexité).

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

e) *) f' est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$

**) f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (q.d).

***) $0 \in]-\infty ; +\infty[$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation : $f'(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur $\mathbb{R}$: $f'(\alpha) = 0$.

f) Par la méthode des balayages :

Pas égal à 1 :

x	$f'(x)$
0	-2
α	0
1	1,72

$0 < \alpha < 1$

Pas égal à 0,1 :

x	$f'(x)$
0,4	$-0{,}01$
α	0
0,5	0,264

$0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

Pas égal à 0,01 :

x	$f'(x)$
0,42	$-0,023$
0,43	0,0137

$\boxed{0,42 < \alpha < 0,43}$ Encadrement à 10^{-2} près de α.

g) Reprenons le tableau de variation de la question d) complété avec α :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\alpha^2+e^{-2\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$

f' croît sur $]-\infty;\alpha]$ et $f(\alpha)=0$, donc $\forall x\in]-\infty;\alpha]$, $f(x)\leq 0$.

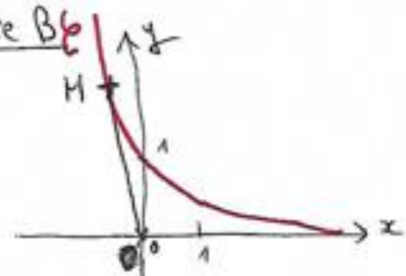
h) f décroît sur $]-\infty;\alpha]$ et croît sur $[\alpha;+\infty[$, donc <u>f admet un minimum sur $\mathbb{R}$</u> <u>atteint lorsque $x=\alpha$</u>.

Ce minimum est égal à $f(\alpha)=\alpha^2+e^{-2\alpha}$.

Or par définition de α, $f'(\alpha)=0$ c'est à dire $2\alpha-2e^{-2\alpha}=0$, donc $e^{-2\alpha}=\alpha$.

et par suite, $\boxed{f(\alpha)}=\alpha^2+\alpha=\boxed{\alpha(\alpha+1)}$

Partie B

1) 

$O(0;0)$
$M(x;h(x))$ car $M\in\mathscr{C}$
$M(x;e^{-x})$.

$\vec{OM}\begin{pmatrix}x\\e^{-x}\end{pmatrix}$

et $OM=\|\vec{OM}\|=\sqrt{x^2+(e^{-x})^2}$

donc $OM=\sqrt{x^2+(e^{-x})^2}$

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x^2+e^{-2x}}=\sqrt{f(x)}$ où $f(x)=x^2+e^{-2x}$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et positive sur $\mathbb{R}$ ($\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2\geq 0$; $e^{-2x}>0$, donc $x^2+e^{-2x}>0$).
donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Ainsi, comme $2\sqrt{f(x)}>0$, $g'(x)$ a le même signe que $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et grâce à q. g) on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\sqrt{\alpha(\alpha+1)}$	$\nearrow$	

g a le même sens de variation que f, donc g admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque $x=\alpha$.

$g(\alpha)=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha(\alpha+1)}$

C'est donc le point $A(\alpha;e^{-\alpha})$ de $\mathscr{C}$ qui est le plus proche de O (q. h) car $OM=g(x)$ et g minimale en α sur $\mathbb{R}$)