Exercice I

Réponse c : $y=-2$

Exercice II

$f(x)=\dfrac{3e^x}{e^x+2}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+2)=2$.
donc par limite de quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$: l'axe des abscisses (équation $y=0$) est donc asymptote horizontale à la courbe représentant f en $-\infty$.

2) Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x}{e^x+2}$ (F.I a priori).

Or, $\dfrac{3e^x}{e^x+2}=\dfrac{3e^x}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}=\dfrac{3}{1+\frac{2}{e^x}}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}3=3$, donc par limite de quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3}$

La droite d'équation $y=3$ est A.S.H à $\mathscr{C}_f$ (courbe de f) en $+\infty$.

Exercice III

1) $\forall x\in\mathbb{R}$, $-1\leqslant \sin(x)\leqslant 1$, donc $-1+3\leqslant \sin(x)+3\leqslant 1+3$, donc : $2\leqslant\sin(x)+3\leqslant 4$.
Vu que $e^{-2x}>0$ on a : $\boxed{2e^{-2x}\leqslant(\sin(x)+3)e^{-2x}\leqslant 4e^{-2x}}$

Or $e^{-2x}=\dfrac{1}{e^{2x}}=\left(\dfrac{1}{e^x}\right)^2$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, donc par quotient et produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right)^2=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2e^{-2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}4e^{-2x}=0$

D'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$

donc par limite de produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$

b) $g(x) = (x+1)e^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

(déjà vu plus haut)

donc par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$.

Exercice IV

$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x>1}} (x-1) = 0^+$; $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x>1}} e^x = e$, donc par limite de quotient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x>1}} \dfrac{e^x}{x-1} = +\infty}$.

$x^3+2x^2+1 = x^2(x+2)+1$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty$ donc par limite de produit et somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2(x+2)+1\right) = -\infty$, bref $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+2x^2+1) = -\infty}$.

$\dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = \dfrac{e^x}{x} \times \sqrt{x}$ (car $x = \sqrt{x}\times\sqrt{x}$, $x>0$).

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc par limite de produits : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty}$

Pour $x>0$: $\dfrac{x^3+3}{x^2+2x+1} = \dfrac{x^3\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{x\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$.

Par limite de référence : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc par produits, somme et quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3}{x^2+2x+1} = +\infty}$

Enfin, $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc par limite de composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^3+3}{x^2+2x+1}} = +\infty$.

Exercice V

$f(x) = \cos(x^2) + 2x - 3$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x^2) \leq 1$, donc $-1 + 2x - 3 \leq \cos(x^2) + 2x - 3 \leq 1 + 2x - 3$

donc $\boxed{2x-4 \leq f(x)} \boxed{\leq 2x-2}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-4) = +\infty$ et $f(x) \geq 2x-4$, donc d'après le théorème de comparaison des limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

De même, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 2x-4$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x-4) = -\infty$, donc par comparaison aussi

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.}$