Exercice I

Exercice I

a) et b)

x	-5		-3		2		3		6
$f(x)$	3	↘	0	↗	2	↘	1	↗	$3{,}3$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice II

1)

Grâce à la courbe ④ tracée ($\mathscr{C}_{g'}$) faisons un tableau de signes de f' sur $[-3;2]$:

x	-3		-1		1		2
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

} Principe de Lagrange.

La seule courbe qui correspond à f croissante sur $[-3;-1]$, décroissante sur $[-1;1]$ et croissante sur $[1;2]$ est la courbe 2.

2)

2) Sur $[-4;-1]$, $g(x) \leqslant 0$ car $\mathscr{C}_g$ est située sous l'axe des abscisses.

Si $f' = g$, alors $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-4;-1]$ et f serait décroissante sur $[-4;-1]$ ce qui n'est pas le cas au vu de la courbe $\mathscr{C}_f$: f croît sur $[-4;-1]$.

Donc on a : $\boxed{g' = f}$.

3)

degré	180	145	y
radians	π	x	$\frac{4\pi}{27}$

$x = \frac{145\pi}{180} = \frac{29\pi}{36}$ rad. et $y = \dfrac{\frac{4\pi}{27} \times 180}{\pi} = \dfrac{4 \times 180}{27}$

$y = \dfrac{4 \times \cancel{9} \times 20}{\cancel{9} \times 3} = \dfrac{80}{3}$

donc $\boxed{145° = \frac{29\pi}{36} \text{ rad}}$ et $\boxed{\frac{4\pi}{27} \text{ rad} = \frac{80}{3}°}$

Exercice III

$f(x) = -2x^3+3x^2+12x+11$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1a) $\boxed{f'(x)} = -2\times 3x^2+3\times 2x+12 = \boxed{-6x^2+6x+12}$

1b) T a pour équation réduite : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ avec : $\begin{cases} f'(1) = -6\times 1^2+6\times 1+12 = -6+6+12 = 12 \\ \text{et} \\ f(1) = -2\times 1^3+3\times 1^2+12\times 1+11 = 24. \end{cases}$

$y = 12(x-1)+24 = 12x-12+24.$

$\boxed{y = 12x+12}.$

2) $g(x) = -4x^3$ avec $x \in \mathbb{R}$.

a) Pour tout réel x, $h(x) = f(x)-g(x) = -2x^3+3x^2+12x+11-(-4x^3)$

$\boxed{h(x)} = -2x^3+3x^2+12x+11+4x^3 = \boxed{2x^3+3x^2+12x+11}$

b) $\boxed{h'(x)} = 2\times 3x^2+3\times 2x+12 = 6x^2+6x+12 = \boxed{6(x^2+x+2)}.$

c) $6>0$, donc $h'(x)$ a le même signe que x^2+x+2 qui est un trinôme avec : $a=b=1$ et $c=2$.

$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times 1\times 2 = 1-8 = -7.$

$\Delta<0$ et $a>0$, donc pour tout réel x, $x^2+x+2>0$

Par suite, $h'(x)>0$ sur $\mathbb{R}$ (produit de deux réels positifs).

Donc h croît sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

d) $h(-1) = 2\times(-1)^3+3\times(-1)^2+12\times(-1)+11$

$\boxed{h(-1)} = 2\times(-1)+3\times 1-12+11 = \underbrace{-2+3}_{1}-12+11 = -11+11 = \boxed{0}$

On complète alors le tableau ci-contre. (en rouge).

e) h croît sur $]-\infty;-1]$ et $h(-1)=0$.

donc, pour tout réel $x \in]-\infty;-1]$, $h(x) \leq 0$.

de même, pour tout réel $x \in [-1;+\infty[$, $h(x) \geq 0$.

d'où :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	

f) $h(x) = f(x)-g(x)$.

Sur $]-\infty;0[$, $h(x)<0$, donc $f(x)-g(x)<0$ et $f(x)<g(x)$: $\mathcal{C}_f$ est AU-DESSOUS de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty;0[$.

De même, $\mathcal{C}_f$ est AU-DESSUS de $\mathcal{C}_g$ sur $]0;+\infty[$.

Enfin, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point d'intersection d'abscisse 0 (et d'ordonnée 11).

Exercice IV

a) $x = AB$ et $0 \leq x \leq 5$.

L'aire du terrain rectangulaire EFGH est égale à $54 m^2$, donc : $EF \times FG = 54$ avec : $\begin{cases} EF = x+2 \\ FG = ? \end{cases}$

donc $(x+2) \times FG = 54$, donc $\boxed{FG = \dfrac{54}{x+2}}$ $(x+2 \neq 0$ car $x \geq 0$ donc $x+2 \geq 2)$.

Par suite, $BC = FG - 2 \times 1{,}5 = FG - 3 = \dfrac{54}{x+2} - 3 = \dfrac{54}{x+2} - \dfrac{3}{1} = \dfrac{54}{x+2} - \dfrac{3(x+2)}{x+2}$

$\boxed{BC} = \dfrac{54-3(x+2)}{x+2} = \dfrac{54-3x-6}{x+2} = \boxed{\dfrac{-3x+48}{x+2}}$

b) $f(x)$ = aire de la piscine ABCD $= AB \times BC$ avec : $AB = x$ et $BC = \dfrac{-3x+48}{x+2}$.

Si $x = 3m$, alors $BC = \dfrac{-3 \times 3+48}{3+2} = \dfrac{39}{5} = 7{,}8$

$f(3) = 3 \times 7{,}8 = 23{,}4$. La piscine aurait une aire de $23{,}4 m^2$ si sa largeur mesurait 3m.

c) Pour tout réel $x \in [0;5]$, $\boxed{f(x)} = AB \times BC = x \times \left(\dfrac{-3x+48}{x+2}\right) = \dfrac{x(-3x+48)}{x+2} = \boxed{\dfrac{-3x^2+48x}{x+2}}$

d) $f(x) = \dfrac{-3x^2+48x}{x+2} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = -3x^2+48x \\ u'(x) = -6x+48 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x+2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{(-6x+48)(x+2) - (-3x^2+48x)}{(x+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-6x^2-12x+48x+96+3x^2-48x}{(x+2)^2}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{-3x^2-12x+96}{(x+2)^2}} \boxed{= \dfrac{-3(x^2+4x-32)}{(x+2)^2}}$

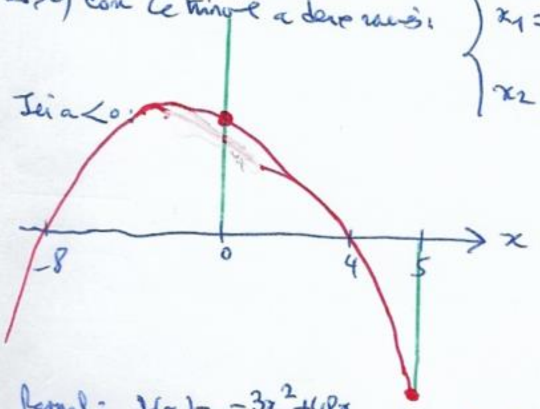
e) Étude du signe de $f'(x)$ sur $[0;5]$: $(x+2)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-3x^2-12x+18$ sur $[0;5]$

$-3x^2-12x+96$ est un trinôme avec : $a = -3$; $b = -12$; $c = 96$.

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times (-3) \times 96 = 144 + 1152 = 1296 = 36^2$.

$\Delta > 0$, donc ce trinôme a deux racines : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a} = \dfrac{12-36}{-6} = \dfrac{-24}{-6} = 4 \\ x_2 = \dfrac{12+36}{-6} = \dfrac{48}{-6} = -8. \end{cases}$

Ici $a < 0$:



donc :

x	0		4		5
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	24	↘	

$f(5) = \dfrac{-3\times 5^2 + 48\times 5}{5+2}$

$f(5) = \dfrac{-75+240}{7}$

$f(5) = \dfrac{165}{7}$

Rappel : $f(x) = \dfrac{-3x^2+48x}{x+2}$, donc $f(0) = 0$; $f(4) = \dfrac{-3\times 4^2 + 48\times 4}{4+2} = \dfrac{-48+192}{6} = \dfrac{144}{6} = 24$

f) f croît sur $[0;4]$ et décroît sur $[4;5]$.

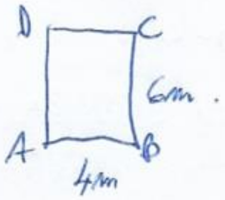
Donc f admet un maximum sur $[0;5]$ atteint lorsque $x = 4$.

Or, $f(x)$ est l'aire de la piscine ABCD.

Cette dernière a une aire maximale lorsque $x = 4m$, c'est à dire lorsque sa largeur $AB = 4m$

et sa longueur $BC = \dfrac{-3\times 4+48}{4+2} = \dfrac{-12+48}{6} = \dfrac{36}{6} = 6.m$.

question a) avec $x=4$



Sa surface maximale vaut donc $24m^2$.