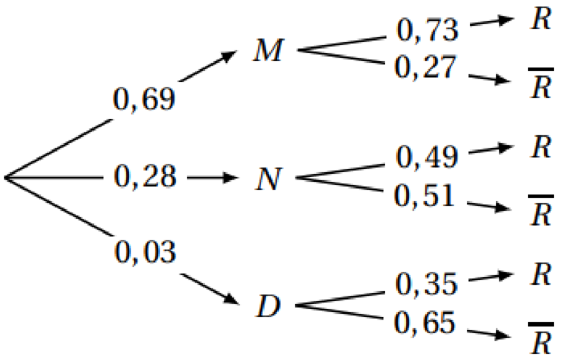
Terminale Maths Groupe 3 **Corrigé du DS5** **Novembre 2023**

Exercice I

Partie A

1. Puisqu'on prélève au hasard un déchet, on est en situation d'équiprobabilité et les proportions sont assimilables à des probabilités. On peut donc compléter l'arbre pondéré ci-contre.



2. L'évènement « le déchet est dangereux et recyclable » est $D \cap R$.

   $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,03 \times 0,35 = 0,0105$.

3. $P\left(M \cap \overline{R}\right) = P(M) \times P_M\left(\overline{R}\right) = 0,69 \times 0,27 = 0,1863$.

   Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que sur l'ensemble des déchets produits par l'entreprise, 18,63 % d'entre eux sont des déchets qui sont minéraux et non recyclables.

4. Les évènements M, N et D partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

   $P(R) = P(R \cap M) + P(R \cap N) + P(R \cap D) = 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,03 \times 0,35 = 0,6514$

   On obtient bien la probabilité annoncée.

5. La probabilité demandée est :

   $$P_R(N) = \frac{P(R \cap N)}{P(R)} = \frac{0,28 \times 0,49}{0,6514} = \frac{686}{3257} \approx 0,2106 \quad \text{au dix-millième près.}$$

Partie B

1. **a.** On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Puisqu'elle compte le nombre de déchets recyclables, le succès est donc l'évènement R, de probabilité $p = 0,6514$, ceci dans un lot de 20 déchets, ce qui signifie qu'il y a eu $n = 20$ répétitions identiques et indépendantes.

   C'est donc la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,6514)$ que suit X.

   b. On cherche la probabilité de l'évènement $(X = 14)$. On a :

   $P(X = 14) = \binom{20}{14} p^{14} \times (1-p)^{20-14} = \binom{20}{14} 0,6514^{14} \times 0,3486^{6} \approx 0,1723$ au dix-millième près.

c.

On cherche la valeur de la probabilité de l'évènement : $(X \geqslant 10)$.

Or, $p(X \geqslant 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leqslant 9)$ car X est à valeurs entières.

$p(X \geqslant 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} p(X = k) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{20}{k} \times 0{,}6514^k \times (1 - 0{,}6514)^{9-k}$.

Avec sa calculatrice, on trouve : $p(X \geqslant 10) \approx 0{,}948$ à 0,001 près.

d. Vu que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}6514)$, son espérance est : $E(X) = np = 20 \times 0{,}6514 = 13{,}028$.

En moyenne, par échantillon de 20 déchets, 13 seront recyclables.

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de déchets recyclables dans ce nouvel échantillon. X_n suit donc la loi binomiale de paramètres $(n\ ;\ 0{,}6514)$

a. On a $p_n = P(X_n = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n = 0{,}3486^n$.

La probabilité qu'aucun déchet ne soit recyclable sur un échantillon de n déchet est donc de $p_n = 0{,}3486^n$

b. L'évènement « au moins un déchet du prélèvement est recyclable » est contraire de celui dont on a calculé la probabilité à la question précédente. On est donc amené à résoudre :

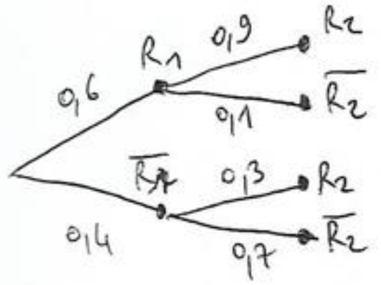
$$\begin{aligned} 1 - p_n \geqslant 0{,}9999 &\iff -p_n \geqslant -0{,}0001 \\ &\iff p_n \leqslant 0{,}0001 \quad \text{car } -1 < 0 \\ &\iff 0{,}3486^n \leqslant 0{,}0001 \end{aligned}$$

A l'aide de sa machine à calculer, on trouver que le plus petit entier n à partir duquel ce seuil est atteint est 9.

<u>Exercice II</u>

<u>0)</u>

a)



F.D.P. Totales

$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(\overline{R_1} \cap R_2)$

$P(R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(R_2)$

$\boxed{P(R_2)} = 0{,}6 \times 0{,}9 + 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}54 + 0{,}12 = \boxed{0{,}66}$

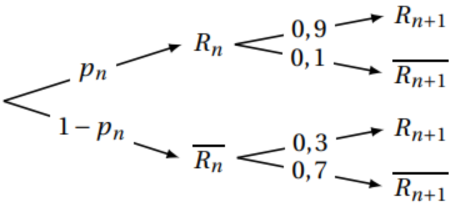
b) On cherche ici la valeur de $P_{R_2}(\overline{R_1})$:

$P_{R_2}(\overline{R_1}) = \dfrac{P(\overline{R_1} \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}3}{0{,}66} = \dfrac{0{,}12}{0{,}66} = \dfrac{12}{66} = \dfrac{4}{22} = \dfrac{2}{11}$

$\boxed{P_{R_2}(\overline{R_1}) \simeq 0{,}18}$

Partie A

1.



2. Les évènements R_n et $\overline{R_n}$ partitionnent l'univers, la loi des probabilités totales donne :

$p_{n+1} = P(R_{n+1}) = P\left(R_n \cap R_{n+1}\right) + P\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) = p_n \times 0,9 + (1-p_n) \times 0,3 = 0,9p_n + 0,3 - 0,3p_n$

Donc on a bien $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3$: on a donc bien établi la relation de récurrence annoncée.

3. **a.** Établissons la relation de récurrence de la suite (u_n). Soit n un entier naturel :

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75$ par définition de la suite (u_n)

$= (0,6p_n + 0,3) - 0,75$ par la relation de récurrence de la suite (p_n)

$= 0,6p_n - 0,45$

$= 0,6(u_n + 0,75) - 0,45$ par définition de la suite (u_n)

$= 0,6u_n + 0,45 - 0,45$

$= 0,6u_n$

La relation de récurrence de la suite (u_n) est donc bien celle d'une suite géométrique, de raison $q = 0,6$. Le premier terme de la suite est $u_0 = p_0 - 0,75 = 0,6 - 0,75 = -0,15$.

b. On peut donc donner la forme explicite du terme général de la suite géométrique :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n = -0,15 \times 0,6^n$.

On en déduit : $u_n = p_n - 0,75 \iff p_n = u_n + 0,75 = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

c. La raison de la suite géométrique u est comprise entre -1 et 1, strictement, donc la suite u converge vers 0.

Par limite de la somme, on en déduit que la suite p converge vers $\ell = 0,75$.

d. En assimilant les probabilités à des proportions, au bout d'un certain temps, l'athlète franchira la barre dans 75 % des cas.

Partie B

1. Ici, nous avons :

- une expérience à deux issues dont le succès est « l'athlète franchit la haie » a une probabilité $p = 0,75$;

- cette expérience est répétée dix fois (la course comporte 10 haies) d'une façon assimilable à une répétition identique et indépendante , donc $n = 10$ répétitions;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,75$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de haies franchies pendant la course).

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0,75)$.

2. La probabilité demandée est $P(X = 10)$. Par propriété, on a :

$P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,75^{10} \times 0,25^{0} = 0,75^{10} \approx 0,056.$

La probabilité que l'athlète franchisse les dix haies est donc d'environ 0,056.

3. La probabilité demandée est $P(X \geqslant 9)$.

Selon le modèle de calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de ce résultat directement, ou alors on a recours à : $P(X \geqslant 9) = 1 - P(X < 9) = 1 - P(X \leqslant 8)$.

La calculatrice donne une valeur approchée au millième près qui est 0,244.

Exercice III

Question 1 : réponse B

Question 2 : réponse B

Question 3 : réponse C

Question 4 : réponse A

Question 5 : réponse A

Question 6 : réponse D

Question 7 : réponse B