Exercice I

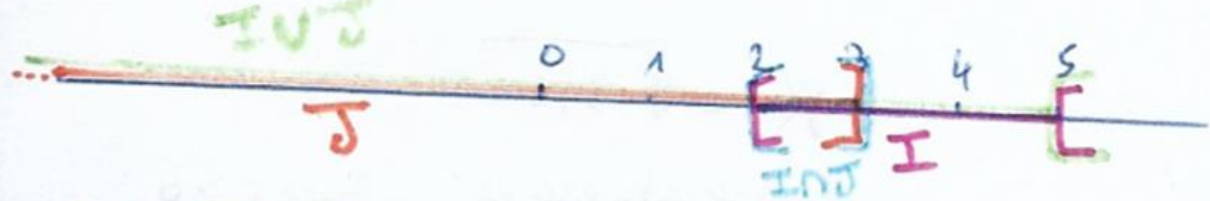
1a) $-1 \leqslant x \leqslant 2$ b) $x < 1$

b) $x \in]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ signifie que $x \neq 3$.

2) a) $x \in]1 ; 3]$; b) $x \in]2 ; +\infty[$.

3) a) $[0 ; 1] \subset [-2 ; 5]$; b) $6 \in]-1 ; 11[$; c) $8 \notin [-4 ; -2]$.

4)



$I \cap J = [2 ; 3]$; $I \cup J =]-\infty ; 5[$.

Exercice II

1a) $3x+4 < x-11$

$3x - x < -11 - 4$

$2x < -15$

$x < -\frac{15}{2}$ (car $2>0$).

$\boxed{S =]-\infty ; -\frac{15}{2}[.}$

1a) $3x+4 < x-11$

$3x - x < -11 - 4$

$2x < -15$

$x < -\frac{15}{2}$ (car $2>0$).

$\boxed{S =]-\infty ; -\frac{15}{2}[.}$

b) $-5x+8 \leqslant 2(1-x)$

$-5x+8 \leqslant 2-2x$

$-5x+2x \leqslant 2-8$

$-3x \leqslant -6$

$x \geqslant \frac{-6}{-3}$ car $-3<0$.

$x \geqslant 2$

$\boxed{S = [2 ; +\infty[}$.

Exercice III

1) $-3 < x \leq 6$

a) $-3-7 < x-7 \leq 6-7$

$\boxed{-10 < x-7 \leq -1}$

b) $-3 < x \leq 6$

donc $-3 \times (-3) > x \times (-3) \geq 6 \times (-3)$ car $-3 < 0$

$9 > -3x \geq -18$

donc $\boxed{-18 \leq -3x < 9}$

c) $-3 < x \leq 6$

Donc $-\frac{3}{2} < \frac{x}{2} \leq \frac{6}{2}$ car $2 > 0$

$-\frac{3}{2} < \frac{x}{2} \leq 3$

Donc $-\frac{3}{2}+1 < \frac{x}{2}+1 \leq 3+1$

$\boxed{-\frac{1}{2} < \frac{x}{2}+1 \leq 4}$

d)

$12 > -4x \geq -24$

$12+5 > -4x+5 \geq -24+5$

$17 > -4x+5 \geq -19$

$\boxed{-19 \leq -4x+5 < 17}$

2) a) $-3 < x \leq 6$

$2 < y \leq 8$

Donc : $-3+2 < x+y \leq 6+8$

$\boxed{-1 < x+y \leq 14}$

b) $x-y = x+(-y)$ avec :

$2 < y \leq 8$

Donc $-2 > -y \geq -8$ c'est-à-dire : $-8 \leq -y < -2$

Donc : $-3 < x \leq 6$

$-8 \leq -y < -2$

$-3+(-8) < x+(-y) < 6+(-2)$

$\boxed{-11 < x-y < 4}$

Exercice IV

a) $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$

b) $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$

c) $1{,}732050 < \sqrt{3} < 1{,}732051$

Exercice V

a) Lorsque $x = -4$, $x = 1$ et $x = 3$.

b) Sur chacun des intervalles : $]-4\ ;\ 1[$ et $]3\ ;\ +\infty[$.

c) Sur chacun des intervalles : $]-\infty\ ;\ -4]$ et $[1\ ;\ 3]$.

d) $f(8) > 0$ et $f(0) > 0$.

Exercice VI

$2x-4 \geqslant 0$ | $-x+7 \geqslant 0$

$2x \geqslant 4$ | $7 \geqslant x$

$x \geqslant \frac{4}{2}$ | $x \leqslant 7$

$x \geqslant 2$

D'où :

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
Signe de $2x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2x-4)(-x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$(2x-4)(-x+7) > 0$ équivaut à : $2 < x < 7$: $S =]2;7[$.

Exercice VII

1) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 = 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$.

BONUS :

Le carré de n'importe quel nombre réel est toujours positif ou nul.

Donc, pour tous réels a, b et c : $(a-b)^2 \geqslant 0$, $(b-c)^2 \geqslant 0$ et $(c-a)^2 \geqslant 0$.

Par suite, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$ en tant que somme de trois termes positifs ou nuls.

Donc d'après la question 1), on peut dire que :

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geqslant 0$, donc : $2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ca$, donc $2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca)$, donc après simplification par 2, et vu que $2>0$, le sens de l'inégalité est inchangé, il vient que : $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.