Première Spé Maths Groupe 4 — Corrigé du DS 5 — Décembre 2022

Exercice I

1) $f(x)=x^2+12x+8$

$\boxed{f'(x)=2x+12}$

2) $g(x)=4x^2-x+2$

$g'(x)=4\times 2x-1$

$\boxed{g'(x)=8x-1}$

3) $h(x)=\frac{2}{3}x^3-2{,}7x^2+\sqrt{3}$

$h'(x)=\frac{2}{3}\times 3x^2-2{,}7\times 2x+0$

$\boxed{h'(x)=2x^2-5{,}4x}$

4) $i(x)=2(\sqrt{x}+2x+1)^2=2(u(x))^2$ où : $\begin{cases} u(x)=\sqrt{x}+2x+1 \\ u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2 \end{cases}$

$i'(x)=2\times 2\times u'(x)\times u(x)$

$i'(x)=4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2\right)(\sqrt{x}+2x+1)=4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}+2x+1).$

$i'(x)=\frac{2(4\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+2x+1)=\frac{2\sqrt{x}\,(4\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}(\sqrt{x}+2x+1).$

$\boxed{i'(x)=\frac{8x+2\sqrt{x}}{x}\times(\sqrt{x}+2x+1)}$

5) $x>0$ et $j(x)=4\sqrt{x}+3x^2+2x+3$

$j'(x)=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+3\times 2x+2$

$\boxed{j'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+6x+2}$

6) $x>0$ et $k(x)=x^5-20x^2+5x+\frac{2}{x}+6\sqrt{x}+2022$

$k'(x)=5x^4-20\times 2x+5+2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)+6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+0.$

$\boxed{k'(x)=5x^4-40x+5-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{\sqrt{x}}}$

7) $x>0$ et $\ell(x)=2\sqrt{x}(5x+4)=u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x)=2\sqrt{x} \\ u'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$ $\begin{cases} v(x)=5x+4 \\ v'(x)=5 \end{cases}$

$\ell'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$\ell'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(5x+4)+2\sqrt{x}\times 5$

$\ell'(x)=\frac{5x+4}{\sqrt{x}}+10\sqrt{x}=\frac{5x+4}{\sqrt{x}}+\frac{10\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$\boxed{\ell'(x)}=\frac{5x+4+10x}{\sqrt{x}}=\frac{15x+4}{\sqrt{x}}=\boxed{\frac{\sqrt{x}\,(15x+4)}{x}}$

8) $m(x) = \dfrac{1}{-x^2+2x+9} = \dfrac{1}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} v(x) = -x^2+2x+9 \\ v'(x) = -2x+2 \end{cases}$

$m'(x) = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{-(-2x+2)}{(-x^2+2x+9)^2}$

$\boxed{m'(x) = \dfrac{2x-2}{(-x^2+2x+9)^2}}$

9) $x \neq 2$ et $n(x) = \dfrac{7x-4}{2-x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = 7x-4 \\ u'(x) = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = 2-x \\ v'(x) = -1 \end{cases}$

$n'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{7(2-x) - (7x-4)\times(-1)}{(2-x)^2}$

$\boxed{n'(x)} = \dfrac{14-7x+7x-4}{(2-x)^2} = \boxed{\dfrac{10}{(2-x)^2}}$

10) $p(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = 1-x^2 \\ u'(x) = 0-2x = -2x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = 1+x^2 \\ v'(x) = 0+2x = 2x \end{cases}$

$p'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)\times 2x}{(1+x^2)^2}$

$\boxed{p'(x)} = \dfrac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2} = \boxed{\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}}$

11) $x > 0$ et $q(x) = 3 - \dfrac{7}{5x} + 2x\sqrt{x} = 3 - \dfrac{7}{5}\times\dfrac{1}{x} + u(x)\times v(x)$ où : $\begin{cases} u(x) = 2x \\ u'(x) = 2 \end{cases}$

$q'(x) = 0 - \dfrac{7}{5}\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ $\qquad \begin{cases} v(x) = \sqrt{x} \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

$q'(x) = \dfrac{7}{5x^2} + 2\sqrt{x} + 2x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$q'(x) = \dfrac{7}{5x^2} + 2\sqrt{x} + \sqrt{x}$

$\boxed{q'(x) = \dfrac{7}{5x^2} + 3\sqrt{x}}$

12) $x > 3$ et $r(x) = 3\sqrt{2x-6} = 3\sqrt{u(x)}$ où $\begin{cases} u(x) = 2x-6 \\ u'(x) = 2 \end{cases}$

$r'(x) = 3\times\dfrac{u'(x)}{} = 3\times\dfrac{2}{} = \dfrac{3}{}$

Exercice II

a) $f'(0)$ = coefficient directeur de T_0 où $T_0 = (AC)$.

$\boxed{f'(0)} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$ (escalier).

b) $f'(1)$ = coefficient directeur de T_1 où T_1 passe par B et est parallèle à l'axe des abscisses, donc a pour coefficient directeur 0.

$\boxed{f'(1) = 0}$

c) $\boxed{f(1) = 1,5}$

d) $\boxed{f'(4) < 0}$

Exercice III

$f(x) = x^3$, donc $f'(x) = 3x^2$

$g(x) = \frac{1}{x}$, donc $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Soit a un réel non nul, et $A(a\,;a^3) \in \mathcal{C}_f$ et $B(a\,;\frac{1}{a}) \in \mathcal{C}_g$.

En A et B, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont des tangentes parallèles si et seulement si : $f'(a) = g'($

Or $f'(a) = g'(a) \iff \boxed{3a^2 = -\frac{1}{a^2}}$ avec $\begin{cases} 3a^2 > 0 \text{ vu que } a \neq 0 \quad \begin{matrix} 3>0 \\ a^2>0 \end{matrix} \\ -\frac{1}{a^2} < 0. \end{cases}$

Par suite, la précédente équation n'admet aucune solution réelle, et à ce titre, pour tout réel $a \neq 0$, $f'(a) \neq g'(a)$:

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ n'ont AUCUNE tangente parallèles en des points de même abscisse.