Exercice I

I – Premier modèle

En 10 minutes la température a augmenté de $1,3-(-19)=1,3+19=20,3$ soit une augmentation de $2,03$ °C.
Selon ce premier modèle l'augmentation de la température serait au bout de 25 minutes de $25\times 2,03=50,75$ (°C).
Les gâteaux seraient donc à une température de $-19+50,75=31,75$(°C) alors que la température ambiante est de 25 °C : c'est impossible, donc ce modèle n'est pas pertinent.

II – Second modèle

1. On a $T_{n+1}-T_n=-0,06\times(T_n-25) \iff T_{n+1}-T_n=-0,06T_n+1,5 \iff T_{n+1}=T_n-0,06T_n+1,5 \iff T_{n+1}=0,94T_n+1,5$.

2.
- Avec $n=0$, la relation précédente donne $T_1=0,94\times(-19)+1,5=1,5-17,86=-16,36$;
- Avec $n=1$, la relation précédente donne $T_2=0,94\times(-16,36)+1,5=1,5-15,3784=-13,8784$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\mathrm{P}(n)$ la propriété : $T_n\leqslant 25$.

Initialisation : $T_0=-19$ et $-19\leqslant 25$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé.

On suppose que pour cet entier là $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $T_n\leqslant 25$.

Montrons alors sous cette hypothèse que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que $T_{n+1}\leqslant 25$.

Or par hypothèse de récurrence, $T_n\leqslant 25$, donc $0,94T_n\leqslant 25\times 0,94$ (car $0,94>0$), donc $0,94T_n+1,5\leqslant 25\times 0,94+1,5$ donc $T_{n+1}\leqslant 23,5+1,5$ donc $T_{n+1}\leqslant 25$: $\mathrm{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence : quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $T_n\leqslant 25$.

Ceci correspond à une évidence : la température des gâteaux ne peut dépasser la température ambiante.

4. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

D'après la question précédente $T_n \leqslant 25$ soit en multipliant par 0,06 :

$0,06T_n \leqslant 0,06 \times 25$, ou $0,06T_n \leqslant 1,5$

et en prenant les opposés : $-1,5 \leqslant -0,06T_n$ et enfin en ajoutant à chaque membre 1,5 :

$0 \leqslant -0,6T_n + 1,5$.

On a donc démontré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n \geqslant 0$: la suite (T_n) est donc croissante.

5. On a donc démontré que la suite (T_n) est croissante et majorée par 25 : elle converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 25$.

6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94T_n + 1,5 - 25$ ou encore $U_{n+1} = 0,94T_n - 23,5 = 0,94\left(T_n - \dfrac{23,5}{0,94}\right) = 0,94(T_n - 25)$, soit finalement $T_{n+1} = 0,94U_n$:cette égalité montre que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,94 et de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

b. On sait que quel soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times 0,94^n$ ou
$U_n = -44 \times 0,94^n$.
Or $U_n = T_n - 25 \iff T_n = U_n + 25$ ou encore $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$, soit finalement :

$$T_n = 25 - 44 \times 0,94^n, \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}$$

c. Comme $0 < 0,94 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,94^n = 0$, d'où par somme de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \ell = 25.$$

7. **a.** On a $T_{25} = 25 - 44 \times 0,97^{25} \approx 15,632$ soit environ 16°C.

b. La calculatrice donne $T_{17} \approx 9,63$ et $T_{18} \approx 10,55$, donc Cécile devra déguster son gâteau entre la 17^e et la 18^e minute après sa sortie.

c.

```
def seuil() :
  n=0
  T = -19
  while T <10 :
     T=0.94*T +1.5
     n = n+1
  return n
```

Exercice II

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$.

1. - Pour $n = 0$ on a : $u_1 = u_{0+1} = 5u_0 - 8 \times 0 + 6 = 0 - 0 + 6 = 6$
   - Pour $n = 1$ on a : $u_2 = u_{1+1} = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 5 \times 6 - 8 + 6 = 28$

2. Soit n un entier naturel. On complète la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
def suite_u(n) :
    u = 0
    for i in range(1,n+1) :
        u = 5*u - 8*(i-1) + 6
    return u
```

Rem : il aurait sans doute été plus simple de donner comme algorithme :

```
def suite_u(n) :
    u = 0
    for i in range(0,n) :
        u = 5*u - 8*i + 6
    return u
```

3. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant 2n$.

   - **Initialisation**

     Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0$ et $2n = 0$; donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité**

     On suppose que $u_n \geqslant 2n$ pour $n \geqslant 0$; c'est l'hypothèse de récurrence.

     $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6 \geqslant 5 \times (2n) - 8n + 6 = 2n + 6 = 2(n+1) + 4 \geqslant 2(n+1)$

     Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
   - **Conclusion**

     La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2n$.

   b. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty$ et $u_n \geqslant 2n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc, d'après la définition de la limite vers $+\infty$ d'une suite, pour tout réel $A > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A; donc il existe un rang n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, alors $u_{n_0} \geqslant 10^p$.

4. Pour tout n, on a : $u_{n+1} - u_n = 5u_n - 8n + 6 - u_n = 4u_n - 8n + 6$; or $u_n \geqslant 2n$ donc $4u_n - 8n \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 6$.

   On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.

a.

On peut conjecturer que, pour tout n, on a : $v_{n+1} = 5v_n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1 = 5u_n - 10n + 5 = 5(u_n - 2n + 1)$
$= 5v_n$

b. On déduit de la question précédente que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 5$, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 \times 0 + 1 = 1$.

On a donc, pour tout n : $v_n = v_0 \times q^n = 5^n$.

Pour tout n, $v_n = u_n - 2n + 1$ donc $u_n = v_n + 2n - 1$ et donc $u_n = 5^n + 2n - 1$.