Exercice I

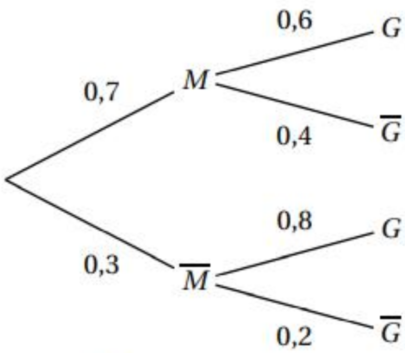
0. Elle vaut 0,06 et correspond à l'information : 6 % des clients ne font aucune visite.

1. **a.** On a $p(M) = 0,7$, donc $p\left(\overline{M}\right) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Or $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0,06$ donc

$p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,06 \iff 0,3 \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,06 \iff p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,2.$

b. On complète l'arbre pondéré :



c. La probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » est : $p\left(\overline{M} \cap G\right) = p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(M) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.

d. On a de même $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(G) = p(M \cap G) + p\left(\overline{M} \cap G\right) = 0,42 + 0,24 = 0,66$.

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée.
On calcule $p_G(M) = \dfrac{p(G \cap M}{p(G)} = \dfrac{p(M \cap G}{p(G)} = \dfrac{0,42}{0,66} = \dfrac{42}{66} = \dfrac{21}{33} = \dfrac{7}{11} \approx 0,64 > 0,5$.
L'affirmation est exacte.

3. **a.** On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

b. D'après le tableau précédent :
$E(T) = 17 \times 0,42 + 12 \times 0,28 + 5 \times 0,24 + 0 \times 0,06 = 7,14 + 3,36 + 1,2 = 11,7$.
Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70 €.

c. Soit x le nombre minimum de visiteurs , x doit vérifier :
$11,7 \times x > 700 \iff x > \dfrac{700}{11,7}$. Or $\dfrac{700}{11,7} \approx 59,8$.
Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.

4. Soit g le prix à payer pour visiter la grotte; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	12 + g	12	g	0

L'espérance devient :
$E = 0,42(12+g)+12\times 0,28+0,24\times g+0\times 0,06 = 5,04+0,42g+3,36+0,24g = 8,4+0,66g$.

Le responsable veut que :
$8,4+0,66g = 15 \iff 0,66g = 6,6 \iff g = 10$.
Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

Exercice II

1) $\overline{A}$ est l'événement : « Aucune des n personnes interrogées n'est cadre ».

$P(\overline{A}) = 0,2^n$ (principe multiplicatif).

Or $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, donc $\boxed{P(A)} = 1 - P(\overline{A}) = \boxed{1 - 0,2^n}$

2) On cherche la plus petite valeur entière n telle que : $P(A) \geq 0,99$, c'est à dire :

$1 - 0,2^n \geq 0,99$.

A l'aide de sa machine (Table), on trouve sans peine que $\underline{\text{pour } n \geq 3,\ P(A) \geq 0,99}$:

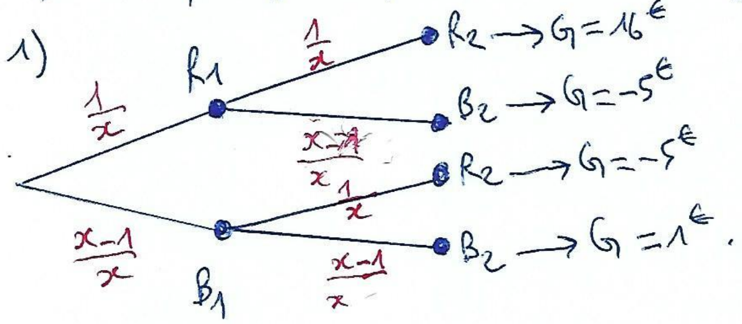
Il faut donc interroger au minimum trois personnes.

Exercice III

$x \geq 4$. Il y a un jeton rouge et $x - 1$ jetons blancs. On note naturellement : B_1 (resp. B_2) l'événement : obtenir un jeton blanc au 1er (respectivement second tirage)

De même on note R_1 (resp. R_2) obtenir le jeton rouge au 1er (resp.) 2ème tirage.

1)



2) a) $\boxed{G(\Omega) = \{-5 ; 1 ; 16\}}$.

Grâce à l'arbre : $P(G = 16) = P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$

$$P(G = 1) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{x-1}{x} \times \frac{x-1}{x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = \frac{(x-1)^2}{x^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}$$

Enfin : $P(G = -5) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2)$ (F. des probabilités totales)

$$P(G = -5) = \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{x} + \frac{x-1}{x} \times \frac{1}{x} = 2 \times \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{x} = \frac{2(x-1)}{x^2} = \frac{2x-2}{x^2}$$

D'où la loi de probabilité de G :

$G = g_i$	-5	1	16
$P(G = g_i)$	$\frac{2x-2}{x^2}$	$\frac{x^2-2x+1}{x^2}$	$\frac{1}{x^2}$

Rq : $\frac{2x-2}{x^2} + \frac{x^2-2x+1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$.

Lire x² à chaque dénominateur !

b) Ce jeu est équitable lorsque $E(G)=0$.

Or $E(G) = -5\times\dfrac{(2x-2)}{x^2} + 1\times\dfrac{(x^2-2x+1)}{x^2} + 16\times\dfrac{1}{x^2}$

$E(G) = \dfrac{-10x+10}{x^2} + \dfrac{x^2-2x+1}{x^2} + \dfrac{16}{x^2} = \dfrac{x^2-12x+27}{x^2}$.

$E(G)=0 \iff \dfrac{x^2-12x+27}{x^2}=0 \iff x^2-12x+27=0$.

$a=1$; $b=-12$; $c=27$. $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times1\times27=144-108=36=6^2$.

$\Delta>0$ donc deux racines : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{12-6}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{12+6}{2} = \dfrac{18}{2} = 9 \end{cases}$

$\mathcal{S} = \{3 ; 9\}$.

Or $x \geq 4$, donc ici il faudra 9 jetons dans ce jeu afin qu'il soit équitable.

Exercice IV

$A(-3 ; f(-3))$ et $B(1 ; f(1))$ car A et B appartiennent à $\mathcal{C}_f$.

Or $f(-3) = \frac{1}{3}\times(-3)^2+(-3)+1 = \frac{1}{3}\times 9-3+1 = 3-3+1 = 1$

$f(1) = \frac{1}{3}\times1^2+1+1 = \frac{1}{3}+2 = \frac{1}{3}+\frac{6}{3} = \frac{7}{3}$.

donc $\boxed{A(-3 ; 1) \text{ et } B(1 ; \tfrac{7}{3})}$.

Par suite, $\boxed{m} = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{\frac{7}{3}-1}{1-(-3)} = \dfrac{\frac{4}{3}}{4} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

(AB) a pour coefficient directeur $m=\frac{1}{3}$.

Exercice V

1) T est tangente en le point A d'abscisse $\boxed{a=2}$ à la courbe de f. T est la droite (AB).

2) $\boxed{f'(2)}$ = coefficient directeur de $(AB) = \frac{3}{1} = \boxed{3}$ (Méthode de l'escalier)

Exercice VI

$f(0)=-2$	; $f'(0)=\frac{3}{1}=3$
$f(-1)=-3$	; $f'(-1)=\frac{-2}{1}=-2$

Soit $\begin{cases} T_A \text{ la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ en } A : \boxed{T_A \text{ a pour équation réduite} : y=3x-2} \\ T_B \text{ la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ en } B : T_B \text{ a pour équation réduite} : y=-2x+p. \end{cases}$

De plus, $B(-1;-3)\in T_B$, donc : $-3=-2\times(-1)+p$.

donc $-3=2+p$, donc $p=-3-2=-5$.

$\boxed{T_B \text{ a pour équation réduite} : y=-2x-5}$

Exercice VII $f(x)=x^2-x-1$

1) Pour $h\neq 0$: $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{(2+h)^2-(2+h)-1-(2^2-2-1)}{h}$

$\boxed{\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}}=\dfrac{4+4h+h^2-2-h-1-1}{h}=\dfrac{h^2+3h}{h}=\dfrac{\cancel{h}(h+3)}{\cancel{h}}=\boxed{h+3}$

2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+3)=\boxed{3}$

Or $3\in\mathbb{R}$, donc f est dérivable en $a=2$, et $\boxed{f'(2)=3}$.

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est donc égal à 3.

3) Evident, cette droite passe par A et a pour pente 3, donc passe aussi par $B(3;4)$.

Notons T_A cette tangente : d'après le cours elle a pour équation réduite :

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=3(x-2)+1$

$\boxed{y=3x-5}$

4) Pour $h \neq 0$, soit $t(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$t(h) = \frac{(x+h)^2 - (x+h) - 1 - (x^2 - x - 1)}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2xh \cancel{+x} - h \cancel{-1} \cancel{-x^2} \cancel{+x} \cancel{+1}}{h}$$

$$\boxed{t(h)} = \frac{2xh - h}{h} = \frac{\cancel{h}(2x-1)}{\cancel{h}} = \boxed{2x-1}$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = \lim\limits_{h \to 0} (2x-1) = 2x-1$

Vu que $2x-1$ est réel, on a : $\boxed{f'(x) = 2x-1}$

5) (d) a pour coefficient directeur $m = -30$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point M d'abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$.

Deux droites parallèles ont même coefficient directeur.

On résout donc l'équation : $f'(x) = -30$ d'inconnue x.

$f'(x) = -30 \iff 2x - 1 = -30 \iff 2x = -29 \iff x = -\frac{29}{2}$. $S = \left\{-\frac{29}{2}\right\}$.

En son point d'abscisse $-\frac{29}{2}$, $\mathcal{C}_f$ admet donc une tangente parallèle à (d).