Lagadie-Garlier Rémy

D.S. n° 3 de mathématiques.

$\frac{20}{20}$ Parfait, Bravo !

Exercice 0 : 2/2

0,5 a) $\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty}$ signifie que une suite (v_n) diverge vers $-\infty$.

0,5 b) La suite (v_n) converge vers 7

1 c) $2n^3 + 5n^2 - n + 1 = \boxed{n^3\left(2 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}$ Oui

Exercice 1 : 10/10 Excellent

a) Par limite de référence : $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$
et $\lim_{n \to +\infty} -1 = -1$.

1 Par limite de produit : $\lim_{n \to +\infty} 2n = +\infty$

Donc par limite de somme : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (n^2 + 2n - 1) = +\infty}$

b) Par limite de référence : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Par limite de produit : $\lim_{n \to +\infty} -2\sqrt{n} = -\infty$ et par limite de somme :

1 $\lim_{n \to +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$

Donc par limite de produit : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (-2\sqrt{n}(n^2 - 1)) = -\infty}$.

Oui

2

c) Nous avons une forme indeterminée.

$n^3 - 5n^2 + 1 = n^2(n-5) + 1$

Par limite de référence : $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

Par limite de somme : $\lim_{n \to +\infty} (n-5) = +\infty$

Par limite de produit : $\lim_{n \to +\infty} (n^2(n-5)) = +\infty$

Donc par limite de somme : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (n^2(n-5)+1) = +\infty = \lim_{n \to +\infty} (n^3 - 5n^2 + 1)}$

2

d) Par limite de référence : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$

Par limite de somme : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right) = 2$

De plus, $-1 < 0,8 < 1$ Bien donc : $\lim_{n \to +\infty} (0,8^n) = 0$

Par limite de produit : $\lim_{n \to +\infty} (0,8^n \times (-0,75)) = 0$ ✓

Donc par limite de somme : $\lim_{n \to +\infty} (0,75 - 0,75 \times 0,8^n) = 0,75$

Donc par limite de produit : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right)(0,75 - 0,75 \times 0,8^n)\right) = 1,5}$

σ_{n}

1

e) Par limite de référence : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Donc par limite de quotient : $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$

Par limite de somme : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n^2} + 1\right) = 1$

De plus, $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc par limite de somme : $\lim_{n \to +\infty} (-2 + \sqrt{n}) = +\infty$

Donc par limite de quotient : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n^2} + 1}{-2 + \sqrt{n}}\right) = 0}$

1,5

f) Nous avons une forme indeterminée.

$$\frac{n^2 - n + 1}{4n^2 + 5} = \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(4 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{5}{n^2}}$$

Par limite de référence : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Par limite de quotient : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{n^2}\right) = 0$

Par limite de somme : $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$; $\lim_{n \to +\infty} \left(4 + \frac{5}{n^2}\right) = 4$

Donc par limite de quotient : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{5}{n^2}}\right) = \boxed{\frac{1}{4} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2 - n + 1}{4n^2 + 5}\right)}$

g) Nous avons une forme indéterminée.

$4^n - 3^n = 4^n\left(1-\frac{3^n}{4^n}\right) = 4^n\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

1,5

$4>1$, donc : $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ Oui

$\left(\frac{3}{4}\right) = 0,75$ et $-1<0,75<1$ donc : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

Par limite de somme : $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 1$

Donc par limite de produit : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(4^n\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right) = +\infty = \lim_{n\to+\infty}(4^n-3}$

T Bien

Exercice II : 5/5 Très Bien

Question 1 :

1 Réponse : c) converge vers 0.

Question 2 :

1 Réponse : c) bornée.

Question 3 :

1 Réponse : b) La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

Question 4 :

1 Réponse : b) La suite (v_n) est croissante

1 Question 5 : b) $l \geq 3$

Exercice III : 3/3

1) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1-0,2^n \leq v_n \leq \frac{2}{n^2}+1$

$-1<0,2<1$ donc : $\lim_{n\to+\infty} 0,2^n = 0$ donc par limite de somme : $\lim_{n\to+\infty}(1-0,2^n) = $

Par limite de référence : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ donc par limite de quotient :

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right) = 0$. Donc par limite de somme : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n^2}+1\right) = 1$

1,5

Oui

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1}$ Bien

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{(-1)^n + 3n^2}{n}$

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leq (-1)^n \leq 1$

$-1+3n^2 \leq (-1)^n + 3n^2 \leq 1+3n^2$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{-1+3n^2}{n} \leq v_n \leq \dfrac{1+3n^2}{n}$ car $n > 0$ Bien

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad v_n \geq \dfrac{3n^2-1}{n}}$

0,5

b) $\dfrac{3n^2-1}{n} = \dfrac{n\left(3n - \frac{1}{n}\right)}{n} = 3n - \dfrac{1}{n}$

Par limite de référence : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$

Par limite de produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 - \dfrac{1}{n}\right) = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3n^2-1}{n}\right)$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geq \dfrac{3n^2-1}{n}$ d'après question 2a).

et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3n^2-1}{n}\right) = +\infty$

Donc d'après le théorème des comparaisons des limites infinies : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty.}$ Bien

TBien

1