Exercice I

1) 0,65 désigne la probabilité de l'événement B ; $p(B) = 0{,}65$.

0,1 désigne la probabilité de l'événement C sachant que A est réalisé, c'est-à-dire $p_A(C)$.

0,6 désigne la probabilité de l'événement contraire de C sachant que B est réalisé, c'est-à-dire : $p_B(\bar{C})$.

2) $p(A) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$; $: p_B(C) = 1 - p_B(\bar{C}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$p_A(\bar{C}) = 0{,}9$.

$p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C) = 0{,}35 \times 0{,}1 = 0{,}035$.

D'après la formule des probabilités totales : $p(\bar{C}) = p(A \cap \bar{C}) + p(B \cap \bar{C}) = 0{,}35 \times 0{,}9 + 0{,}65 \times 0{,}6$

$p(\bar{C}) = 0{,}315 + 0{,}39 = 0{,}705$

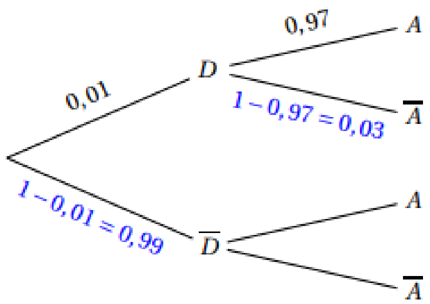
Exercice II

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97. La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,014 65.

On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'évènement « un danger se présente ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M.

1. On représenter les éléments de la situation que l'on connaît par un arbre pondéré.



2. a. La probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active est :
   $P(D \cap A) = 0{,}01 \times 0{,}97 = 0{,}0097$.

   b. On en déduit que la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active est : $P_A(D) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}0097}{0{,}01465} \approx 0{,}662$.

3. La probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est :

   $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}$.

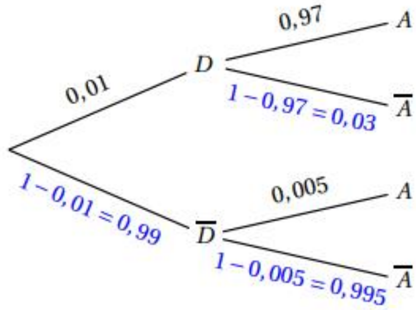
   On sait que $P(A) = 0{,}01465$.

   D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(D \cap A) + P\left(\overline{D} \cap A\right)$.

   On déduit : $P(A) - P(D \cap A) = P\left(\overline{D} \cap A\right)$, donc $P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0{,}01465 - 0{,}0097 = 0{,}00495$.

   Donc $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0{,}00495}{0{,}99} = 0{,}005$.

   On peut compléter l'arbre :



4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.
Cette situation est représentée par les événements $D \cap \overline{A}$ et $\overline{D} \cap A$.
La probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est donc :
$P\left(D \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0,01 \times 0,03 + 0,99 \times 0,005 = 0,00525 < 0,01.$

Exercice III

1a) Grâce au tableau : $P(A) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5} = 0,4$

$P(B) = \frac{150}{500} = \frac{15}{50} = 0,3$

1b) $P(A \cap B) = \frac{60}{500} = 0,12$ (60 : intersection de la ligne Femmes et colonne VTT).

1c) $\overline{A} \cup B$ est l'événement : "La personne est un homme ou fait du VTT".

$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B)$

$P(\overline{A} \cup B) = 1 - P(A) + P(B) - P(\overline{A} \cap B)$

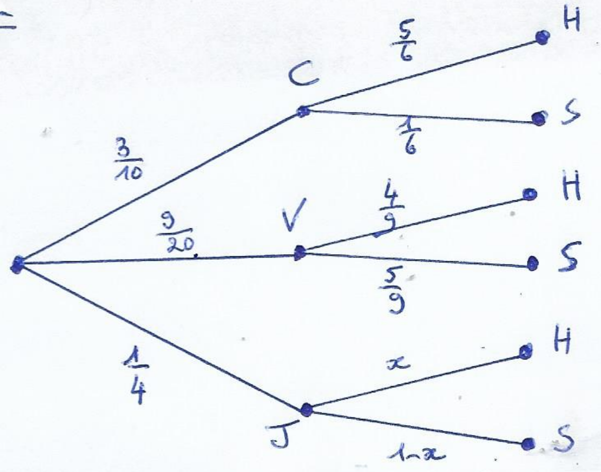
$P(\overline{A} \cup B) = 1 - 0,4 + 0,3 - \frac{90}{500} = 1 - 0,4 + 0,3 - 0,18 = 0,72$

1d) $P(A \cap B) = 0,12$ (q. 1b) et $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$.
alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et par suite, A et B sont indépendants.

2) Sans calcul, par lecture du tableau : $P_T(F) = \frac{22}{75}$ où T est l'événement : faire du tir à l'arc.

Exercice V

1)



$\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

2) On cherche ici la valeur de : $P(C\cap H)$:

$$\boxed{P(C\cap H)} = P(C)\times P_C(H) = \frac{3}{10}\times\frac{5}{6} = \frac{\cancel{3}\times\cancel{5}}{2\times\cancel{5}\times\cancel{3}\times 2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

3) a) On cherche ici la valeur de $P_J(H)$ que l'on notera x

D'après la formule des probabilités totales :

$$\underbrace{P(H)} = \underbrace{P(C\cap H)} + \underbrace{P(V\cap H)} + \underbrace{P(J\cap H)}$$

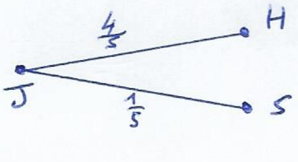
$$\frac{13}{20} = \frac{1}{4} + \frac{9}{20}\times\frac{4}{9} + \frac{1}{4}\times x$$

$$\frac{13}{20} = \frac{1}{4} + \frac{4}{20} + \frac{x}{4}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{13}{20} - \frac{1}{4} - \frac{4}{20} = \frac{13}{20} - \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Donc $x = 4\times\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Par suite : $\boxed{P_J(H) = \frac{4}{5}}$ D'où :



b) $P(C\cap H) = \frac{1}{4}$ (q.2) ; $P(C) = \frac{3}{10}$ et $P(H) = \frac{13}{20}$.

$P(C)\times P(H) = \frac{3}{10}\times\frac{13}{20} = \frac{39}{200}$.

Or $\frac{1}{4} \neq \frac{39}{200}$ (car $0{,}25 \neq 0{,}195$), donc $P(C\cap H)\neq P(C)\times P(H)$, par suite, les événements C et H ne sont pas indépendants.

4) On cherche ici la valeur de : $P_H(V)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$\boxed{P_H(V)} = \frac{P(V\cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{4}{20}}{\frac{13}{20}} = \frac{4}{20}\times\frac{20}{13} = \boxed{\frac{4}{13}}$$

($P(V\cap H) = \frac{4}{20}$ calculé en q. 3a) !