

Exercice I

Réponse D : Pour tout $x \in]5; 10[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe -

Exercice II

1)

x	$-\infty$	0,3	2,7	$+\infty$	
$f'(x)$	+	o	-	o	+
$f(x)$	↗		↘		↗

2) f semble être convexe sur $]-\infty; -1]$ et sur $[2; +\infty[$. (Intervalle sur lesquels f semble être concave sur $[-1; 2]$ (Intervalle sur lequel f' décroît, f' croît))

Exercice III

1) $x \in \mathbb{R}$, et $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2 - 3x + 1 \\ u'(x) = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} v(x) = e^x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$
 f est dérivable sur \mathbb{R} car produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 1)e^x = e^x(2x - 3 + x^2 - 3x + 1)$$

$$f'(x) = (x^2 - x - 2)e^x$$

2) Étudions le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} : Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même

signe que la fonction trinôme définie par : $x^2 - x - 2$

$$a = 1; b = -1; c = -2. \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

$$\Delta > 0, \text{ donc ce trinôme a deux racines (= annulateurs) : } \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 3}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 3}{2} = 2 \end{cases}$$

J'ai $a = 1$, donc $a > 0$.



Donc :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	o	-	o	+
$f(x)$	↗ $\frac{5}{e}$		↘ $-e^2$		↗

$$f(-1) = ((-1)^2 + 3 + 1)e^{-1} = 5e^{-1} = \frac{5}{e}$$

$$f(2) = (2^2 - 3 \times 2 + 1)e^2 = -e^2$$

3) Ta par équation réduite: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec ici $a=0$

$$y = f'(0)x + f(0) \quad \text{et grâce à 1) : } f'(0) = -2e^0 = -2$$

$$\boxed{y = -2x + 1.}$$

$$f(0) = e^0 = 1.$$

4) Vu que f est concave sur $[0 ; 1]$, C_f est située au-dessous de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.

Or $0 \in [0 ; 1]$, donc en particulier, C_f est située au-dessous de sa tangente T en son point d'abscisse 0 sur $[0 ; 1]$, c'est-à-dire que pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$, $(x^2 - 3x + 1)e^x \leq -2x + 1$.

Exercice IV

0) $\forall m \in \mathbb{N}, u_m \leq 4$.

1) $m \in \mathbb{N}$ et $S(m)$ est la propriété: $12m+1 < 3^m$

a) Pour $m=0$, $12m+1 = 12 \times 0 + 1 = 1$ et $3^0 = 1$.

Or $1 < 1$ est une inégalité fautive, donc $S(0)$ est fautive.

b) Pour $m=5$: $12m+1 = 12 \times 5 + 1 = 61$ et $3^5 = 243$.

Or $61 < 243$ est une inégalité vraie, donc $S(5)$ est vraie.

c) $S(m+1)$ est: $12(m+1)+1 < 3^{m+1}$ ou encore $12m+13 < 3^{m+1}$.

2) Si on tape $u(1)$: m vaut alors 1 et par le range (1) simple: $0 \leq R < 1$ avec R entier

Donc R prend une seule valeur (0) et il y a une seule boule.

$$u=2 \text{ va être opé l'instruction transformé en: } u = \frac{2 \times 2}{2^2 + 1} = \frac{4}{5} = 0,8$$

quand on tape $u(1)$ on aura en sortie 0,8.

Si on tape $u(2)$: m vaut alors 2 et par le range (2) simple: $0 \leq R < 2$ avec R entier, donc

R prend deux valeurs: 0 puis 1: on fait deux fois d'affilée l'instruction indiquée (deux "tours de boucle").

On a déjà vu qu'après un tour de boucle, $u = 0,8$

Au second tour de boucle, la valeur stockée de la variable u passera à :

$$u = \frac{2 \times 0,8}{0,8^2 + 1} = \frac{1,6}{1,64} = \frac{160}{164} = \frac{40}{41} \quad ; \text{ Python affichera pour } u(2) \text{ la valeur}$$

approchée $0,975609781\dots$ avec plein de décimales.

Valeur exacte de $u(2)$: $\frac{40}{41}$, valeur approchée à 10^{-10} près : $0,9756097561$.

b) $u_0 = 2$
pour tout entier naturel m , $u_{m+1} = \frac{2u_m}{u_m^2 + 1}$.

Exercice V

exercice IV $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel m , $u_{m+1} = u_m + 2m + 1$.

1a) Pour $m=0$: $u_{0+1} = u_0 + 2 \times 0 + 1$, donc $u_1 = 0 + 1 = 1$

Pour $m=1$: $u_{1+1} = u_1 + 2 \times 1 + 1$, donc $u_2 = 1 + 2 + 1 = 4$

1b)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	0	1	4	9	16	25	36	49

1c) Il semblerait que pour tout entier naturel m , on ait : $u_m = m^2$.

2) $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n = n^2$

Initialisation : Pour $n=0$, on a bien $u_0 = 0^2$ car $u_0 = 0$ et que $0 = 0^2$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé.

Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est à dire que : $u_n = n^2$.

Hypothèse de récurrence.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, en justifiant que : $u_{n+1} = (n+1)^2$.

Or $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ d'après l'énoncé, et d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = n^2$, de sorte que : $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (identité remarquable 1).
 Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Donc, d'après le principe de récurrence, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2}$

Exercice VI

$x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = -x + \frac{e^{2x}}{e^x + 1} = -x + \frac{u(x)}{v(x)}$ où : $\begin{cases} u(x) = e^{2x} \\ v(x) = e^x + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v'(x) = e^x \\ u'(x) = 2e^{2x} \end{cases}$

$$f'(x) = -1 + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{2e^{2x}(e^x + 1) - e^{2x} \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = -1 + \frac{2e^{3x} + 2e^{2x} - e^{3x}}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{-(e^x + 1)^2 + e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{-(e^{2x} + 2e^x + 1) + e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{3x} + e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x + 1)^2}}$$

Exercice VII

$u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Étape d'initialisation : pour $n=0$, montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que $u_0 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^0$.

Or $u_0 = 2$ (énoncé) et $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^0 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Donc $u_0 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Étape d'hérédité : Soit n un entier naturel fixé. Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à savoir que : $u_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^n$.

Hypothèse de récurrence

Montrons alors, sous cette hypothèse, que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire montrons que

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^{n+1}$$

Or d'après l'énoncé, $u_{n+1} = 3u_n + 1$, et par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^n, \text{ donc } u_{n+1} = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^n\right) + 1$$

$$c: u_{m+1} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \times 3 \times 3^m + 1$$

$$u_{m+1} = -\frac{3}{2} + 1 + \frac{5}{2} \times 3^{m+1}$$

$$u_{m+1} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^{m+1}$$

$$(car \ 3 \times 3^m = 3^1 \times 3^m = 3^{m+1})$$

$$\left(-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}\right)$$

$S(m+1)$ est vraie -

Conclusion: $P(0)$ est vraie, et $\forall m \in \mathbb{N}$, $S(m)$ est héréditaire -

Par conséquent le principe de récurrence, $S(m)$ est vraie pour tout entier naturel m , à savoir:

$$\forall m \in \mathbb{N}, u_m = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^m$$

Exercice VIII

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = 0,5u_m + 1.$$

$$\text{On a l'air que: } \forall m \in \mathbb{N}, u_m \leq 2.$$

Sol: $\forall m \in \mathbb{N}$: Étudions le signe de $u_{m+1} - u_m$:

$$\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} - u_m = 0,5u_m + 1 - u_m = -0,5u_m + 1.$$

$$\text{OR on sait que } \forall m \in \mathbb{N}, u_m \leq 2, \text{ donc } -0,5u_m \geq -0,5 \times 2 \text{ car } -0,5 < 0.$$

$$\text{donc } -0,5u_m \geq -1$$

$$\text{donc } -0,5u_m + 1 \geq -1 + 1$$

$$\text{donc } -0,5u_m + 1 \geq 0.$$

Par suite, $\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} - u_m \geq 0$: la suite (u_m) est donc croissante -

Exercice IX

$u_0 = 0,5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$.

1a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - u_n^2 = f(u_n)$, on f est la fonction définie sur \mathbb{R}

par : $f(x) = 2x - x^2 = -x^2 + 2x$.

1b) $f'(x) = -2x + 2 = 2(-x + 1)$.

Or $x \in [0; 1]$, donc $0 \leq x \leq 1$, donc $1 - x \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$ sur $[0; 1]$.

Par suite, f croît sur $[0; 1]$.

2) 05 :

x	0	1
$f(x)$	0	1

$f(0) = 0$
 $f(1) = -1^2 + 2 \times 1 = -1 + 2 = 1$

2) $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

Étape d'initialisation: Pour $n=0$, prouver que : $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$.

Or $u_0 = 0,5$ et $u_1 = f(u_0) = f(0,5) = 2 \times 0,5 - 0,5^2 = 1 - 0,25 = 0,75$.

Or $0 \leq 0,5 \leq 0,75 \leq 1$, donc $P(0)$ est vraie -

Étape d'hérédité: Soit n un entier naturel arbitrairement fixé -

hypothèse de récurrence
 $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Supposons par cet entier n que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que :

Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$
But

Or par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

Donc : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$ car f croît sur $[0; 1]$
 d'après q. 1b).
 Donc : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$

alors $P(n+1)$ est vraie -

Conclusion: $P(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est héréditaire. donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

3) Grâce à (9.2) on a: $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m \leq u_{m+1}$ donc (u_m) croît.

$\forall m \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_m \leq 1$, donc (u_m) est une suite bornée (majorée par 0 et majorée par 1).