Terminale Maths Groupe 3 **Corrigé du DS 2** **Octobre 2023**

Exercice I

Réponse D : Pour tout $x \in]5 ; +\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Exercice II

1)

x	$-\infty$		0,3		2,7		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

2) f semble être convexe sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[2 ; +\infty[$. (Intervalles sur lesquels f' croît)
f semble être concave sur $[-1 ; 2]$ (Intervalle sur lequel f' décroît).

Exercice III

1)
$x \in \mathbb{R}$, et $f(x) = (x^2-3x+1)e^x = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2-3x+1 \\ u'(x) = 2x-3 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x-3)e^x + (x^2-3x+1)e^x = e^x(2x-3+x^2-3x+1)$$

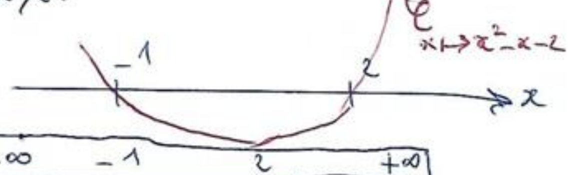
$$\boxed{f'(x) = (x^2-x-2)e^x}$$

2) Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$: Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que la fonction trinôme définie par : x^2-x-2

$a = 1$; $b = -1$; $c = -2$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times(-2) = 9$

$\Delta > 0$, donc ce trinôme a pour racines (= annulateurs) : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-3}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$

Ici $a = 1$, donc $a > 0$.



Donc :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	$\frac{5}{e}$	↘	$-e^2$	↗	

$f(-1) = ((-1)^2+3+1)e^{-1} = 5e^{-1} = \frac{5}{e}$

$f(2) = (2^2-3\times2+1)e^2 = -e^2$

3) <u>Ta pour équation réduite :</u> $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec ici $a = 0$

$y = f'(0)x + f(0)$ et grâce à 1) : $f'(0) = -2e^0 = -2$

$\boxed{y = -2x + 1.}$ $f(0) = e^0 = 1.$

4) Vu que f est concave sur $[0 \; ; \; 1]$, C_f est située au-dessous de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.

Or $0 \in [0 \; ; \; 1]$, donc en particulier, C_f est située au-dessous de sa tangente T en son point d'abscisse 0 sur $[0 \; ; \; 1]$, c'est-à-dire que pour tout réel x appartenant à $[0 \; ; \; 1]$, $(x^2 - 3x + 1)e^x \leqslant -2x + 1$.

<u>Exercice IV</u>

0) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 4$.

1) $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{S}(n)$ est la propriété : $12n + 1 < 3^n$

a) Pour $n = 0$, $12n + 1 = 12 \times 0 + 1 = 1$ et $3^0 = 1$.
Or $1 < 1$ est une inégalité fausse, donc <u>$\mathcal{S}(0)$ est fausse</u>.

b) Pour $n = 5$: $12n + 1 = 12 \times 5 + 1 = 61$ et $3^5 = 243$.
Or $61 < 243$ est une inégalité vraie, donc <u>$\mathcal{S}(5)$ est vraie</u>.

c) $\mathcal{S}(n+1)$ est : <u>$12(n+1) + 1 < 3^{n+1}$ ou encore $12n + 13 < 3^{n+1}$</u>.

2) <u>Si on tape u(1)</u> : n vaut alors 1 et for k in range(1) signifie : $0 \leqslant k < 1$ avec k entier
Donc k prend une seule valeur (0) et il y a une seule boucle.
$u = 2$ va être après l'instruction transformé en : $u = \frac{2 \times 2}{2^2 + 1} = \frac{4}{5} = 0{,}8$
quand on tape u(1) on aura en sortie 0,8.

<u>Si on tape u(2)</u> : n vaut alors 2 et for k in range(2) signifie : $0 \leqslant k < 2$ avec k entier, donc k prend deux valeurs : 0 puis 1 : on fait deux fois d'affilée l'instruction indiquée ("deux tours de boucle").

On a déjà vu qu'après un tour de boucle, $u=0{,}8$

Au second tour de boucle, la valeur stockée dans la variable u passera à :

$u = \dfrac{2\times 0{,}8}{0{,}8^2+1} = \dfrac{1{,}6}{1{,}64} = \dfrac{160}{164} = \dfrac{40}{41}$: Python affichera pour u(2) la valeur

approchée 0.9756097561.... avec plein de décimales.

Valeur exacte de u(2) : $\dfrac{40}{41}$, valeur approchée à 10^{-10} près : 0,9756097561.

b) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n^2+1} \end{cases}$.

Exercice V

$u_0 = 2$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\times 3^n$, où $n\in\mathbb{N}$.

Étape d'initialisation : Pour $n=0$, montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que $u_0 = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\times 3^0$.

Or $u_0 = 2$ (énoncé) et $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\times 3^0 = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\times 1 = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Donc $u_0 = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\times 3^0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Étape d'hérédité : Soit n un entier naturel fixé. Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à savoir que : $\underbrace{u_n = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\times 3^n}_{\text{Hypothèse de récurrence}}$.

Montrons alors, sous cette hypothèse, que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire prouvons que $u_{n+1} = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\times 3^{n+1}$.

Or d'après l'énoncé, $u_{n+1} = 3u_n + 1$, et par hypothèse de récurrence, on a :

$u_n = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\times 3^n$, donc $u_{n+1} = 3\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\times 3^n\right)+1$

Exercice VI

$x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = -x + \dfrac{e^{2x}}{e^x+1} = -x + \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où : $\begin{cases} u(x) = e^{2x} \\ u'(x) = 2e^{2x} \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^x+1 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$.

$$f'(x) = -1 + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{2e^{2x}(e^x+1) - e^{2x} \times e^x}{(e^x+1)^2} = -1 + \frac{2e^{3x} + 2e^{2x} - e^{3x}}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{-(e^x+1)^2 + e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{-(e^{2x} + 2e^x + 1) + e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{3x} + e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x+1)^2}}$$

Exercice VII

$u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Étape d'initialisation : Pour $n=0$, montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que $u_0 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^0$.

Or $u_0 = 2$ (énoncé) et $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^0 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Donc $u_0 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Étape d'hérédité : Soit n un entier naturel fixé. Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à savoir que : $\underbrace{u_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^n}_{\text{Hypothèse de récurrence}}$.

Montrons alors, sous cette hypothèse, que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire prouvons que $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^{n+1}$.

Or d'après l'énoncé, $u_{n+1} = 3u_n + 1$, et par hypothèse de récurrence, on a :

$u_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^n$, donc $u_{n+1} = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^n\right) + 1$

: $u_{n+1} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \times 3 \times 3^n + 1$

$u_{n+1} = -\frac{3}{2} + 1 + \frac{5}{2} \times 3^{n+1}$ (car $3 \times 3^n = 3^1 \times 3^n = 3^{n+1}$)

$u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^{n+1}$ $\left(-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}\right)$.

$\mathcal{S}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{S}(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}(n)$ est héréditaire.
Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, à savoir

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^n}$

Exercice VIII

$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5 u_n + 1$.

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$: Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0{,}5 u_n + 1 - u_n = -0{,}5 u_n + 1$.

Or on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2$, donc $-0{,}5 u_n \geqslant -0{,}5 \times 2$ car $-0{,}5 < 0$.

donc $-0{,}5 u_n \geqslant -1$

donc $-0{,}5 u_n + 1 \geqslant -1 + 1$

donc $-0{,}5 u_n + 1 \geqslant 0$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$: $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est donc croissante}}$.

Exercice IX

$u_0 = 0{,}5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$.

1a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2 = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$

par : $\boxed{f(x) = 2x - x^2 = -x^2 + 2x}$

1b) $f'(x) = -2x + 2 = 2(-x+1)$.

Or $x \in [0;1]$, donc $0 \leq x \leq 1$, donc $1 - x \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$ sur $[0;1]$.

Par suite, $\underline{f \text{ croît sur } [0;1]}$.

D'où :

x	0	1
$f(x)$	0 $\nearrow$	1

$f(0) = 0$

$f(1) = -1^2 + 2 \times 1 = -1 + 2 = 1$

2) $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

__Étape d'initialisation :__ Pour $n = 0$, prouvons que : $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$.

Or $u_0 = 0{,}5$ et $u_1 = f(u_0) = f(0{,}5) = 2 \times 0{,}5 - 0{,}5^2 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Or $0 \leq 0{,}5 \leq 0{,}75 \leq 1$, donc $\underline{\mathcal{P}(0) \text{ est vraie}}$.

__Étape d'hérédité :__ Soit n un entier naturel arbitraire et fixé.

Supposons pour cet entier là que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $\overbrace{0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1}^{\text{hypothèse de récurrence}}$.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, à savoir que : $\underbrace{0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1}_{\text{But}}$

Or par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

Donc : $\underbrace{f(0)}_{=} \leq \underbrace{f(u_n)}_{=} \leq \underbrace{f(u_{n+1})}_{=} \leq \underbrace{f(1)}_{=}$ car f croît sur $[0;1]$ d'après q. 1b).

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$

donc $\underline{\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}}$.

__Conclusion :__ $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1}$

3) Grâce à (q.2) on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) croît.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, donc (u_n) est une suite bornée (minorée par 0 et majorée par 1).