Première Maths Groupe 4 — Corrigé du DS 2 — Octobre 2022

Exercice I

a)

	Au plus de 100 kg	Plus de 100 kg	Total
Avants	6	15	21
Arrières	11	3	14
Total	17	18	35

b) $P(A) = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} = 0,6$ $\quad P(B) = \frac{18}{35}$

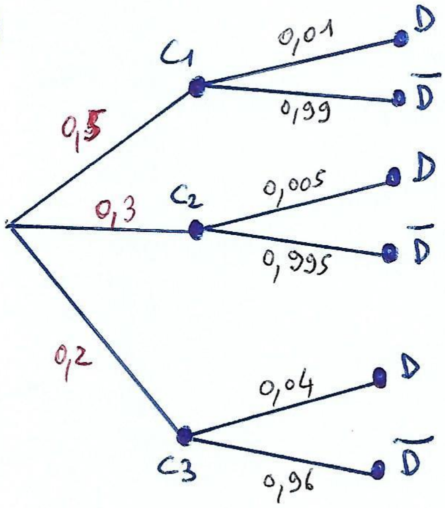
$P(C) = P(A \cap B) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$

$P(D) = P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = \frac{14}{35} + \frac{18}{35} - \frac{3}{35} = \frac{29}{35}$

c) On cherche ici $P_A(B)$: $\boxed{P_A(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{7}$

Exercice II

1)



2) On cherche ici la valeur de $P(C_3 \cap D)$:

Or $\underline{P(C_3 \cap D)} = P(C_3) \times P_{C_3}(D) = 0,2 \times 0,04 = \underline{0,008}$

3) D'après la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D) + \underbrace{P(C_3 \cap D)}$

$P(D) = 0,5 \times 0,01 + 0,3 \times 0,005 + 0,008$ (q.2)

$P(D) = 0,005 + 0,0015 + 0,008$

$\boxed{P(D) = 0,0145}$

4) On cherche ici la valeur de $P_D(C_3)$:

or d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$P_D(C_3) = \frac{P(C_3 \cap D)}{P(D)} \overset{\text{q.2) et 3)}}{=} \frac{0,008}{0,0145}$ donc $\boxed{P_D(C_3) \simeq 0,5517 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$

Exercice III

1) i) Il faut résoudre l'équation : $\underline{f(x)=0}$ à savoir ici $\underline{7x^2+5x-48=0}$.

ii) $7x^2+5x-48=0$.

Ici, $a=7$, $b=5$ et $c=-48$.

$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times 7\times(-48) = 25+1344 = 1369 = 37^2$

$\underline{\Delta>0}$ donc cette équation a pour solutions :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-\sqrt{1369}}{14} = \dfrac{-5-37}{14} = \dfrac{-42}{14} = -3 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+\sqrt{1369}}{14} = \dfrac{-5+37}{14} = \dfrac{32}{14} = \dfrac{16}{7} \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{ -3 \ ; \ \frac{16}{7} \right\}}$$

alors $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en les points : $A(-3 \ ; 0)$ et $B\left(\frac{16}{7} \ ; 0\right)$.

2) $f(x) = 7x^2+5x-48$.

$a>0$, donc « f décroît puis croît ensuite ».

$\underline{\text{Plus précisément}}$: $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-5}{14}$

alors :

x	$-\infty$	$\frac{-5}{14}$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗

$S\left(-\frac{5}{14} \ ; y_S\right)$ avec $y_S = f\left(-\frac{5}{14}\right) = 7\times\left(\frac{-5}{14}\right)^2 + 5\times\left(\frac{-5}{14}\right) - 48$.

$y_S = 7\times\dfrac{25}{196} - \dfrac{25}{14} - 48 = \dfrac{175}{196} - \dfrac{350}{196} - \dfrac{9408}{196} = \dfrac{-9583}{196}$

$y_S = -\dfrac{1369}{28}$

alors $\boxed{S\left(-\frac{5}{14} \ ; \frac{-1369}{28}\right)}$

Exercice IV

$T(x) = 2x^2+3x-5$. (Ici $a=2$; $b=3$; $c=-5$).

T a pour racine évidente $x_1=1$. alors en notant x_2 sa seconde racine on a :

$x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$ alors $x_2 = \dfrac{-5}{2}$

Par suite $T(x)$ se factorise en : $T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

donc $T(x) = 2(x-1)(x-(\frac{-5}{2}))$

$$\boxed{T(x) = 2(x-1)(x+\frac{5}{2})}.$$

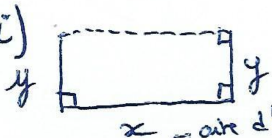
Exercice V

i) x est une longueur, donc $x \geq 0$.

De plus, $x \leq 160$.

Donc $0 \leq x \leq 160$, donc $\boxed{x \in [0;160]}$.

ii)



On a : $2y + x = 160$ donc $y = \frac{160-x}{2} = 80 - \frac{x}{2}$.

aire d'un rectangle !

et $f(x) = x \times y = x(80 - \frac{x}{2}) = 80x - \frac{x^2}{2}$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 80x}.$$

iii) f est une fonction polynôme du second degré, avec : $a = -\frac{1}{2}$; $b = 80$ et $c = 0$.

Vu que $a < 0$, f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2\times(-\frac{1}{2})} = 80$

Or $80 \in [0;160]$.

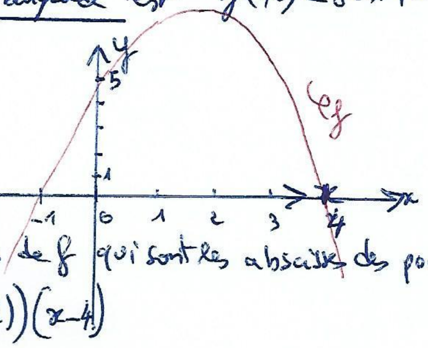
Il faut donc donner à la longueur de ce rectangle la valeur de 80 mètres pour obtenir une zone de baignade d'aire maximale.

La largeur vaut : $y = 80 - \frac{80}{2} = 80 - 40 = 40$ m

L'aire maximale de baignade est $f(40) = 80 \times 40 = 3200$ m^2.

Exercice VI

Croquis :



$f(x) = ax^2 + bx + c$

On connait les racines de f qui sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des x.

On factorise $f(x)$:

$f(x) = a(x-(-1))(x-4)$

$f(x) = a(x+1)(x-4)$

De plus, $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point $C(0;5)$, donc $f(0) = 5$

$f(0)=5$ équivaut à : $a(0+1)(0-4)=5$ donc à $-4a=5$

donc $a=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4}$.

Par suite, $f(x)=-\frac{5}{4}(x+1)(x-4)$

$f(x)=-\frac{5}{4}(x^2-4x+x-4)$

$f(x)=-\frac{5}{4}(x^2-3x-4)$

$\boxed{f(x)=-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}x+5}$

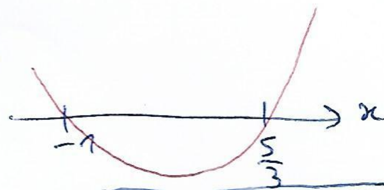
Exercice VII

a) $3x^2-2x-5>0$. Ici $a=3$; $b=-2$; $c=-5$.

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-5)=4+60=64=8^2$

$\Delta>0$ donc ce trinôme a deux racines : $\begin{cases} x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-8}{6}=\frac{-6}{6}=-1 \\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+8}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}. \end{cases}$

$a>0$



donc

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x^2-2x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite, $3x^2-2x-5>0$ équivaut à $x<-1$ ou $x>\frac{5}{3}$.

$\boxed{S=]-\infty\,;-1[\,\cup\,]\frac{5}{3}\,;+\infty[}$.

b) $x(x+2)\leqslant-1$ équivaut à :

$x^2+2x\leqslant-1$

$\underbrace{x^2+2x+1}\leqslant0$

$(x+1)^2\leqslant0$ (I.R n°2).

Cette inégalité est vraie seulement si $x+1=0$, à savoir $x=-1$, car pour tout réel x $(x+1)^2\geqslant0$. Donc $\boxed{S=\{-1\}}$.

Exercice VIII

On doit prouver que pour tout réel x, $f(x)>g(x)$ c'est à dire que $x^2>2x-2$.

Résolvons donc l'inéquation : $x^2>2x-2$:

$x^2 > 2x - 2$ équivaut à $x^2 - 2x + 2 > 0$. 5

$a = 1$; $b = -2$; $c = 2$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4$.

$\Delta < 0$, donc pour tout réel x, $x^2 - 2x + 2$ a le même signe que $a (= 1)$, donc pour tout réel x, $x^2 - 2x + 2 > 0$ c'est à dire : $x^2 > 2x - 2$.

donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$