Exercice I

A = $\dfrac{100!\times 7!}{11!\times 98!} = \dfrac{100\times 99\times 98!\times 7!}{11\times 10\times 9\times 8\times 7!\times 98!} = \dfrac{100\times 99}{99\times 10\times 8} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$

$\boxed{B} = \dfrac{13!-11!}{12!} = \dfrac{13\times 12\times 11! - 11!\times 1}{12!} = \dfrac{11!\,(13\times 12-1)}{12\times 11!} = \dfrac{13\times 12-1}{12} = 13-\dfrac{1}{12} = \boxed{\dfrac{155}{12}}$

$\boxed{C} = \ln(n!) - \ln\big((n+1)!\big) = \ln\left(\dfrac{n!}{(n+1)!}\right) = \ln\left(\dfrac{n!}{(n+1)\times n!}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \boxed{-\ln(n+1)}$.

3) $0\leq k\leq n$ et $0\leq p\leq n$, donc :

$\boxed{G} = \binom{n}{k}\times\binom{n-k}{n-p} = \dfrac{n!}{k!\,\cancel{(n-k)!}}\times\dfrac{\cancel{(n-k)!}}{(n-p)!\,(n-k-(n-p))!} = \boxed{\dfrac{n!}{k!\,(n-p)!\,(p-k)!}}$

et $\boxed{D} = \binom{n}{p}\times\binom{p}{k} = \dfrac{n!}{\cancel{p!}\,(n-p)!}\times\dfrac{\cancel{p!}}{k!\,(p-k)!} = \boxed{\dfrac{n!}{k!\,(n-p)!\,(p-k)!}}$

Ainsi $G = D$, de sorte que : $\boxed{\binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{n-p} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}}$.

Exercice II

a) Autant que de 3-listes d'éléments deux à deux distincts pris dans $E = [\![1;20]\!]$.
Donc : $20\times 19\times 18 =$ <u>6840 tiercés possibles</u>.

b) <u>$3! = 6$</u> (écrire toutes les permutations du tiercé gagnant).

c) Pourquoi ? On a vu qu'il y a en tout : 6840 tiercés différents en tout.
Un joueur qui ferait ces 6840 grilles de tiercé est sûr de gagner le tiercé dans l'ordre, ainsi que les 5 tiercés gagnants dans le désordre.
$6840\times 2 = 13680$.
Donc un tiercé dans l'ordre rapporterait <u>bien moins de 13680 €</u> (<u>en général au plus quelques milliers d'euros</u>).

Exercice III

a) On doit choisir 5 numéros parmi 49 − 5 = 44 non sortis le 23/05/2023.

donc $\binom{44}{5}$ possibles.

Ensuite 1 numéro chance parmi 10 − 1 = 9 non sortis le 23/05/2023.

Par principe multiplicatif, on peut faire $\binom{44}{5}\times 9$ grilles de lotos n'ayant aucun numéro commun avec ceux de la série précédente.

Donc $p = \dfrac{\binom{44}{5}\times 9}{\underbrace{\binom{49}{5}\times 10}_{\text{nb total de loto}}} = \dfrac{\frac{44!}{39!5!}\times 9}{\frac{49!}{44!5!}\times 10}$

$p = 9\times\dfrac{44!}{39!5!}\times\dfrac{44!\times 5!}{49!\times 10} = \dfrac{44!^2\times 9}{39!\,49!\times 10}$

$p = \dfrac{44\times43\times42\times41\times40\times9}{49\times48\times47\times46\times45\times10}$

$p \simeq 0{,}513$ (Donc environ 51,3 % de chance d'avoir deux tirages n'ayant rien en commun).

b) On choisit 2 numéros parmi les 5 sortis le 23/05/2023 ainsi que 3 numéros parmi les 44 non sortis le 23/05/2023.

Par principe multiplicatif : $\binom{5}{2}\times\binom{44}{3} = 10\times\dfrac{44!}{41!\times 3!} = \dfrac{10\times44\times43\times42}{6}$

et $p' = \dfrac{\binom{5}{2}\times\binom{44}{3}}{\binom{49}{5}} = \dfrac{10\times44\times43\times42}{6}\times\dfrac{120}{49\times48\times47\times46\times45}$ et $\binom{49}{5} = \dfrac{49!}{44!\,5!} = \dfrac{49\times48\times47\times46\times45}{120}$

$p' \simeq 0{,}069$ (Un peu moins de 7 % donc).

Exercice IV

Il faut 5 filles et 5 garçons dans le top 10 ! (L'ordre indiffère ici pour le choix des individus).

On choisit les 5 filles (du top 10) parmi les 90 filles. $\binom{160-70}{5} = \binom{90}{5}$

On choisit les 5 garçons du top 10 parmi les 70 garçons ; on a : $\binom{70}{5}$ choix possibles.

Par le principe multiplicatif, on a : $\binom{90}{5}\times\binom{70}{5}$ choix de 10 élèves à classer sur le podium.

Une fois les 10 élèves choisis, il ne reste plus qu'à les placer (classer), c'est à dire à les permuter donc 10! possibles.

Ainsi, il y a : $\binom{90}{5}\times\binom{70}{5}\times 10!$ façons de classer les

$\binom{90}{5}\times\binom{70}{5}\times 10! = \dfrac{90!}{5!\,85!}\times\dfrac{70!}{5!\,65!}\times 10! = \dfrac{90\times89\times88\times87\times86}{(5!)^2}\times 70\times69\times68\times67\times66\times 10!$

Avec Python cela se calcule et donne quelque chose comme : 1930226237067247257600.

Exercice V

BACCALAUREAT comporte : 4A ; 2C et les autres lettres B, L, U, R, E, T figurent une fois et une seule. (On a un mot de 12 lettres).

On place par exemple les 4A : $\binom{12}{4}$ choix possibles de leur position.

On place les 2C parmi $12-\cancel{4}=8$ places restantes, donc $\binom{8}{2}$.

On permute ensuite les 6 lettres restantes dans les 6 places restantes : 6! possibilités.

Par principe multiplicatif, on a :

$$N = \binom{12}{4} \times \binom{8}{2} \times 6! \text{ anagrammes du mot BACCALAUREAT.}$$

$$\boxed{N} = \frac{12!}{\cancel{8!}\,4!} \times \frac{\cancel{8!}}{\cancel{6!}\times 2} \times \cancel{6!} = \frac{12!}{4!\times 2} = \boxed{9979200} \text{ anagrammes.}$$

Exercice VI

1) Il y a 26 lettres dans l'alphabet. On note E l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.
Connaître ses initiales, c'est former un couple de E (ou une 2-liste de E).

Il y a en tout $26\times 26 = 676$ tels couples d'éléments deux à deux distincts.

donc dès qu'il y a 677 élèves dans un lycée, au minimum, on est sûr qu'il y en a au moins deux ayant les mêmes initiales !

2) $|E|=7$ donc on veut les parties de E qui sont de cardinal 0, 2, 4 ou 6.

Il y a $\binom{n}{k}$ parties de cardinal k dans un ensemble de cardinal n.

donc ici (principe additif), on a : $N = \binom{7}{0}+\binom{7}{2}+\binom{7}{4}+\binom{7}{6}$ parties de E de cardinal pair

$N = 1 + 21 + 35 + 7$

$\boxed{N = 64 \text{ parties de E de cardinal pair}}$.

Exercice VII

1a) Il y en a $N = 26^9$ (nombre de 9 listes d'un ensemble E de cardinal 26).

Avec Python : $N = 5429503678976$.

1b) Une fois les 5 lettres du mot MERCI placées (côte à côte), il reste à placer 4 autres lettres de l'alphabet (soit 26^4 choix possibles).

MERCI ****
*MERCI***
MERCI
***MERCI*
****MERCI

5 choix possibles pour la "position" du mot merci.

Donc $\boxed{N'} = 5 \times 26^4 = \boxed{2.284.880}$ tels mots (principe multiplicatif).

1c) $A = \{$ensemble des mots (de 9 lettres) contenant au moins une voyelle$\}$.

$\bar{A} = \{$ensemble des mots de 9 lettres ne contenant aucune voyelle$\}$.

$\Omega = \{$ensemble des mots de 9 lettres$\}$.

$\Omega = A \cup \bar{A}$ avec A et $\bar{A}$ disjointes.

donc $\text{card}(\Omega) = \text{card}(A) + \text{card}(\bar{A})$

donc $\text{card}(A) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{A})$ avec : $\begin{cases} \text{card}(\Omega) = 26^9 \text{ (q. 1a)} \\ \text{card}(\bar{A}) = 20^9 \text{ (même principe qu'en 1a) en ne prenant que les 20 consonnes).} \end{cases}$

$$\boxed{\text{card}(A) = 26^9 - 20^9}.$$

$\text{card}(A) \approx 4{,}9175 \times 10^{12}$ avec Python : $\boxed{4917503678976}$

1d) Le mot a 9 lettres. Plus de consonnes que de voyelles laisse donc comme possibles :

5C et 4V : on note N_1 le nb de tels mots de 9 lettres.

6C et 3V : — N_2 —

7C et 2V : — N_3 —

8C et 1V : — N_4 —

9C et 0V : — N_5 —

$$N_1 = \underbrace{\binom{9}{5}}_{\text{nb de placements 5C.}} \times \binom{4}{4} \times \underbrace{20^5 \times 6^4}_{\text{listes de 5 consonnes et de 4 voyelles}} = \binom{9}{5} \times 20^5 \times 6^4$$

(l'ordre compte ici pour les lettres !),

de même : $N_2 = \binom{9}{6} \times \binom{3}{3} \times 20^6 \times 6^3 = \binom{9}{6} \times 20^6 \times 6^3 \simeq 1{,}16 \times 10^{12}$

$$N_3 = \binom{9}{7} \times 20^7 \times 6^2 \simeq 1{,}659 \times 10^{12}$$

$$N_4 = \binom{9}{8} \times 20^8 \times 6 \simeq 1{,}382 \times 10^{12}$$

$$N_5 = \binom{9}{9} \times 20^9 = 20^9 \simeq 5{,}12 \times 10^{11}$$

Par principe additif il y a donc $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ mots de 9 lettres comportant plus de consonnes que de voyelles.

Avec Python, N = 5237043200000.

1e)

Aucune voyelle répétée signifie :

Soit 0 voyelle dans le mot. Exemple : ZTKLMNRBC

Soit 1 seule voyelle dans le mot Exemple : BCDEFGHXV

Soit 2 voyelles distinctes dans le mot Exemple : AKEZZTFGH

Soit 3 voyelles 2 à 2 distinctes dans le mot Exemple : EAULMNPZQ

Soit 4 voyelles 2 à 2 distinctes dans le mot : Exemple : ABCDEYORW

Soit 5 voyelles 2 à 2 distinctes dans le mot : Exemple : AEIOUMNSB

Soit les 6 voyelles de l'alphabet dans le mot : Exemple BYUOIEATK

3

Il y a : 20^9 mots de 9 lettres formés que de consonnes.

Il y a : $\underbrace{\binom{6}{1}}_{\text{on choisit la voyelle}} \times \underbrace{\binom{9}{1}}_{\text{on choisit la place de la voyelle ds le mot}} \times \underbrace{20^8}_{\text{on place 8 autres consonnes}} = 6 \times 9 \times 20^8$ mots de 9 lettres avec une seule ~~consonne~~ voyelle de dans.

Par un procédé similaire :

Il y a : $\underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{choix des 2 voyelles}} \times \underbrace{\binom{9}{2}}_{\text{choix des places des 2 voyelles}} \times 20^7 = 15 \times 36 \times 20^7$ mots de 9 lettres contenant deux voyelles distincts seulement.

3

Il y a : 20^9 mots de 9 lettres formés que de consonnes.

Il y a : $\underbrace{\binom{6}{1}}_{\text{on choisit la voyelle}} \times \underbrace{\binom{9}{1}}_{\text{on choisit la place de la voyelle ds le mot}} \times \underbrace{20^8}_{\text{on place 8 autres consonnes}} = 6 \times 9 \times 20^8$ mots de 9 lettres avec une seule ~~consonne~~ voyelle de dans.

Par un procédé similaire :

Il y a : $\underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{choix des 2 voyelles}} \times \underbrace{\binom{9}{2}}_{\text{choix des places des 2 voyelles}} \times 20^7 = 15 \times 36 \times 20^7$ mots de 9 lettres contenant deux voyelles distincts seulement.

D'où le nombre cherché N de mots de 9 lettres sans voyelles répétées :

$$N = 20^9 + \binom{6}{1}\times\binom{9}{1}\times 20^8 + \binom{6}{2}\times\binom{9}{2}\times 20^7 + \binom{6}{3}\times\binom{9}{3}\times 20^6 + \binom{6}{4}\times\binom{9}{4}\times 20^5$$
$$+ \binom{6}{5}\times\binom{9}{5}\times 20^4 + \binom{6}{6}\times\binom{9}{6}\times 20^3$$

$$\boxed{N = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k}\times\underbrace{\binom{9}{k}}_{\text{lire } k \text{ ici}}\times 20^{9-k}}$$

Python donne : $\underline{N = 2699289632000}$

Exercice VIII

a) F G F ------ G ou bien : G F ------- F

Il y a : $6\times6\times5\times5\times4\times4\times3\times3\times2\times2\times1\times1$ possibles dans chacune des deux configurations (F à gauche ou G à gauche).

D'où $N = 2\times6\times6\times5\times5\times4\times4\times3\times3\times2\times2\times1\times1$

$\boxed{N} = 2\times6!\times6! = 2\times(6!)^2 = 2\times720^2 = \boxed{1.036.800}$ placements en alternance de sexe.

b) Il y en a : $\frac{12!}{12} = \boxed{11!}$ (on écrit toutes les permutations et on tient compte du fait que la table est circulaire).
$11! = 39916800$.

Exercice IX Numérotons les places de 1 à 10 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		B	B	B					

Les 3 Voitures blanches peuvent occuper les places :
1-2-3 || 2-3-4 || 3-4-5 etc... jusqu'à 8-9-10

Cela donne 8 choix possibles pour positionner le bloc des 3 voitures blanches côte à côte.

Ensuite, on permute ces 3 voitures blanches au sein des 3 places : 3! possibilités

Une fois les blanches placées, reste à placer les 7 autres véhicules dans les 7 places restantes, donc à permuter ces 7 véhicules, à savoir 7! possibilités.

Ainsi, il y a : $N = 8\times3!\times7!$ "cas favorables".

Au total, on peut placer les 10 voitures dans 10 places de 10! façons différentes (chaque véhicule est distinct des autres !).

D'où $\boxed{P} = \frac{8\times3!\times7!}{10!} = \frac{\cancel{8}\times6\times\cancel{7!}}{10\times9\times\cancel{8}\times\cancel{7!}} = \frac{6}{90} = \boxed{\frac{1}{15}}$.

La probabilité que les trois voitures blanches soient côte à côte est égale à $\boxed{\frac{1}{15}}$.