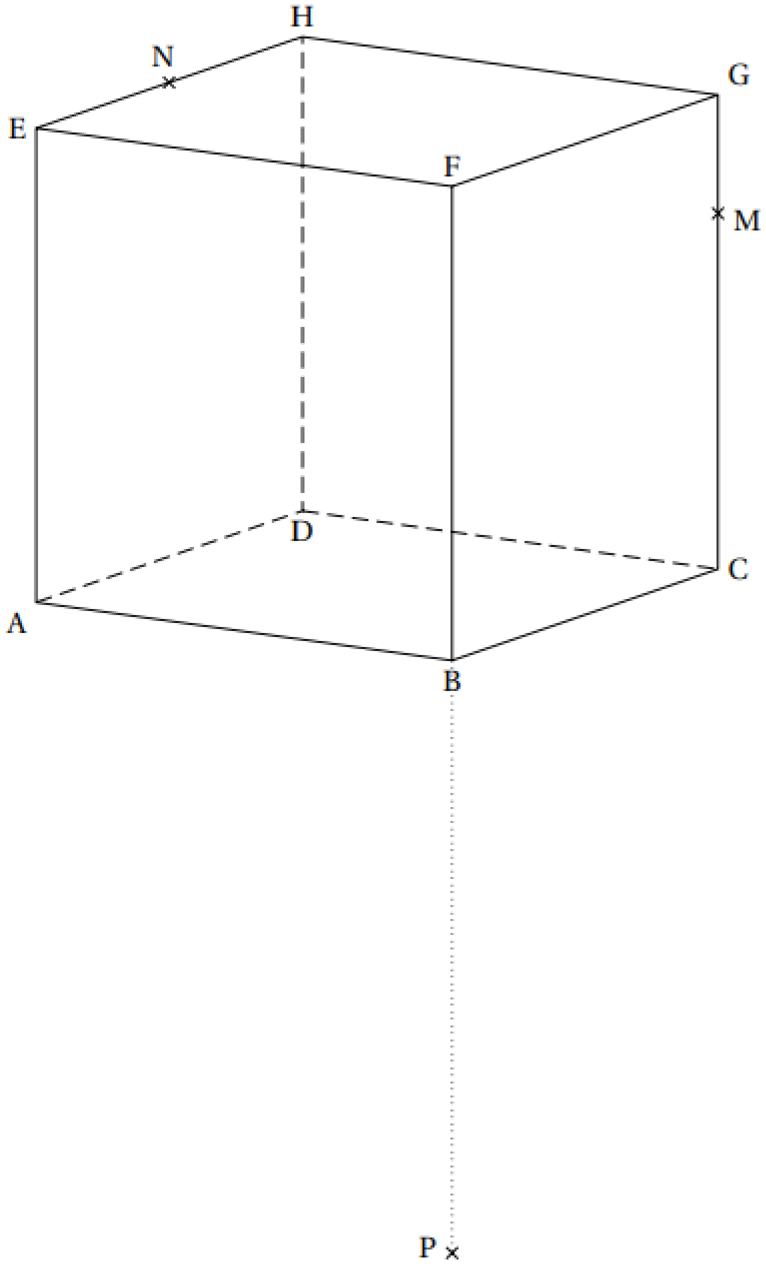
Exercice I

1. On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \\ z_N - z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. On obtient la figure suivante :



3. Les vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$ sont clairement non colinéaires (l'abscisse de l'un est nulle sans que celle l'autre ne le soit), donc les trois points M, N et P sont non alignés, et définissent donc un plan.

4. **a.** Puisque le repère est orthonormé, on va calculer le produit scalaire avec les coordonnées :
$\overrightarrow{\text{MN}} \cdot \overrightarrow{\text{MP}} = (-1) \times 0 + \left(\dfrac{-1}{2}\right) \times (-1) + \dfrac{1}{4} \times (-2) = 0 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0.$
Les vecteurs sont donc orthogonaux et non nuls, donc l'angle qu'ils définissent est un angle droit. On en déduit que le triangle est rectangle en M.
Calculons les longueurs MN et MP :
$\text{MN} = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}.$ $\qquad \text{MP} = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$
Comme $\text{MN} \neq \text{MP}$, le triangle est seulement un triangle rectangle en M (il n'est pas isocèle).

b. L'aire du triangle MNP est la moitié du produit de la longueur d'une base par la longueur de la hauteur correspondante.
Comme le triangle est rectangle en M, on choisit [MN] comme base et donc [MP] est donc la hauteur correspondante.

L'aire du triangle est donc $\mathcal{A}_{\text{MNP}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{105}}{8}$

5. **a.** Avec $\overrightarrow{n}\,(5\,;\,-8\,;\,4)$ on a :
$\overrightarrow{\text{MN}} \cdot \overrightarrow{n} = (-1) \times 5 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times (-8) + \dfrac{1}{4} \times 4 = -5 + 4 + 1 = 0$
$\overrightarrow{\text{MP}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \times 5 + (-1) \times (-8) + (-2) \times 4 = 0 + 8 - 8 = 0$
Le vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (MNP), il est donc orthogonal au plan.
C'est donc un vecteur normal de (MNP).

b. On en déduit que le plan (MNP) a une équation cartésienne de la forme $5x - 8y + 4z + d = 0$, où d est un nombre réel.
Comme $\text{M} \in (\text{MNP})$, d est tel que :

$$\begin{aligned} 5x_{\text{M}} - 8y_{\text{M}} + 4z_{\text{M}} + d = 0 &\iff 5 \times 1 - 8 \times 1 + 4 \times \frac{3}{4} + d = 0 \\ &\iff 5 - 8 + 3 + d = 0 \\ &\iff d = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (MNP) est donc bien $5x - 8y + 4z = 0$.

6. Si une droite est orthogonale au plan (MNP), c'est donc qu'elle est dirigée par un vecteur normal à (MNP), donc $\overrightarrow{n}$, par exemple.

Le point F a pour coordonnées $\text{F}(1\,;\,0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{n}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{n}\,(5\,;\,-8\,;\,4)$ et donc la droite passant par F et dirigée par $\overrightarrow{n}$ admet pour représentation paramétrique le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_{\text{F}} + t x_{\overrightarrow{n}} \\ y = y_{\text{F}} + t y_{\overrightarrow{n}} \\ z = z_{\text{F}} + t z_{\overrightarrow{n}} \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{soit, ici :} \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 5t \\ y = \quad -8t \\ z = 1 + 4t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

7. Si L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP), alors, c'est que L est l'intersection du plan (MNP) avec la droite d, orthogonale à (MNP) et passant par F.

Si on considère le point L_t, de paramètre t sur la droite d, cherchons la valeur du paramètre t pour que $L_t \in$ (MNP).

$$\begin{aligned} L_t \in (\text{MNP}) &\iff 5x_{L_t} - 8y_{L_t} + 4z_{L_t} = 0 \\ &\iff 5(1+5t) - 8(-8t) + 4(1+4t) = 0 \\ &\iff 5 + 25t + 64t + 4 + 16t = 0 \\ &\iff 105t + 9 = 0 \\ &\iff t = \frac{-9}{105} = \frac{-3}{35} \end{aligned}$$

Le point de paramètre $\frac{-3}{35}$ sur d a pour coordonnées : $\left(1+5\times\frac{-3}{35}\ ;\ -8\times\frac{-3}{35}\ ;\ 1+4\times\frac{-3}{35}\right)$, c'est donc bien le point L, de coordonnées $\text{L}\left(\frac{4}{7}\ ;\ \frac{24}{35}\ ;\ \frac{23}{35}\right)$.

8. On a donc $\overrightarrow{\text{FL}}\begin{pmatrix}\frac{-3}{7}\\ \frac{24}{35}\\ \frac{-12}{35}\end{pmatrix}$ et donc $\text{FL} = \sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^2 + \left(\frac{24}{35}\right)^2 + \left(\frac{-12}{35}\right)^2} = \frac{3\sqrt{105}}{35}$.

Pour calculer le volume du tétraèdre FMNP, on va considérer le triangle MNP comme étant la base, avec $\mathscr{A}_{\text{MNP}} = \frac{\sqrt{105}}{8}$.

<u>Faire un croquis ici :</u>

La hauteur correspondante est donc la distance du quatrième sommet F au plan contenant la base, c'est-à-dire le plan (MNP). D'après la question **7.**, c'est donc la distance FL, que l'on vient de calculer.

On a donc $V_{\text{FMNP}} = \frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{\text{MNP}}\times\text{FL} = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{105}}{8}\times\frac{3\sqrt{105}}{35} = \frac{105}{8\times35} = \frac{3\times35}{8\times35} = \frac{3}{8}$

Le volume de FMNP est donc de $\frac{3}{8}$.

<u>Exercice III</u>

<u>Question 1</u> : Réponse B : l'ensemble vide.

<u>Question 2</u> : Réponse A : sécantes.

<u>Question 3</u> : Réponse B : incluse dans le plan (P).

<u>Question 4</u> : Réponse C : sécants et non perpendiculaires.

Exercice II

1)

Soit $K(x;y;z)$. $K \in (FG) \iff \underline{\exists t \in \mathbb{R},\ K(1;1;t)}$.

M est le centre de la face BCGF (qui est un carré), donc M est le milieu de [FC] vu que les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu.

Or dans le repère $(D;\overrightarrow{DH};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})$: $F(1;1;1)$ et $C(0;1;0)$

donc $M\left(\frac{x_F+x_C}{2};\frac{y_F+y_C}{2};\frac{z_F+z_C}{2}\right)$, donc $\underline{M\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)}$.

de même : N est le centre du carré EFGH, donc N est le milieu de [FH] avec $H(1;0;0)$.

Par suite : $N\left(\frac{1+1}{2};\frac{1+0}{2};\frac{1+0}{2}\right)$ c'est à dire $\underline{N\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$

KMN est rectangle en K équivaut à $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KN}$ sont orthogonaux, donc à $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KN}=0$.

(Dans l'absolu il faudrait s'assurer que K, M et N sont deux à deux distincts, ce qui est évident de par les coordonnées de ces trois points)

$\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}-t\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KN}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-t\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KN}=0 \iff -\frac{1}{2}\times 0+0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(\frac{1}{2}-t\right)=0 \iff \left(\frac{1}{2}-t\right)^2=0 \iff t=\frac{1}{2}$

Ainsi, <u>l'affirmation 1 est vraie</u> : l'unique point K appartenant à (FG) tel que KMN soit rectangle en K est $\boxed{K\left(1;1;\frac{1}{2}\right)}$.

2)

$D(0;0;0)$; $F(1;1;1)$ et $B(0;1;1)$.

Calculons $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FD}$:

$\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, donc $\boxed{\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FD}} = xx'+yy'+zz' = -1\times(-1)+0\times(-1)+0\times(-1)=\boxed{1}$

on est ici en R.O.N.

D'autre part, $\underbrace{\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FD}} = \|\overrightarrow{FB}\|\times\|\overrightarrow{FD}\|\times\cos(\overrightarrow{FB};\overrightarrow{FD})$ avec $\begin{cases}\|\overrightarrow{FB}\|=\sqrt{(-1)^2+0^2+0^2}=1\\\|\overrightarrow{FD}\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}\end{cases}$

Par suite : $1 = 1\times\sqrt{3}\times\cos(\widehat{DFB})$

Donc $\cos(\widehat{DFB})=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et à l'aide d'une calculatrice (réglée en mode degré) : $\underline{\widehat{DFB}\approx 55^\circ}$ arrondi au degré près.

Ainsi $\boxed{\text{l'affirmation 2 est fausse}}$.

<u>Exercice IV</u>

1. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $2x+y-z+2=0$.

   b. $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=2\times1+1\times(-1)+(-1)\times1=0$ donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.
   On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. **a.** Le plan $\mathscr{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, donc il a une équation cartésienne de la forme
   $x-y+z+d=0$ où d est un réel à déterminer.
   $\mathrm{B}\in\mathscr{P}_2$ donc $x_\mathrm{B}-y_\mathrm{B}+z_\mathrm{B}+d=0$, autrement dit $1-1+2+d=0$ donc $d=-2$.
   Le plan $\mathscr{P}_2$ a donc pour équation cartésienne $x-y+z-2=0$.

   b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&0\\y&=&-2+t\\z&=&t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

   On cherche l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant le système : $\left\{\begin{array}{rcl}2x+y-z+2&=&0\\x-y+z-2&=&0\end{array}\right.$.

   $\left\{\begin{array}{rcl}2x+y-z+2&=&0\\x-y+z-2&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}2x+y&=&z-2\\x-y&=&-z+2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}3x&=&0\\2x+y&=&z-2\end{array}\right.$

   On aboutit donc à $x=0$, $y=z-2$ et z quelconque égal à t.

Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont donc pour intersection la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&0\\y&=&-2+t\\z&=&t\end{array}\right.$ $t\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite Δ.

Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont donc pour intersection la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&0\\y&=&-2+t\\z&=&t\end{array}\right.$ $t\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite Δ.

<u>Autre solution possible</u> : On sait que les deux plans $\mathscr{P}_1$ et à $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires, donc sécants selon une droite :

Soit M un point quelconque de la droite Δ : il existe donc un réel t tel que M(0 ; -2+t ; t).

Montrons que M appartient à $\mathscr{P}_1$ et à $\mathscr{P}_2$ en vérifiant que les coordonnées de M vérifient chacune des équations cartésiennes de ces plans :

Or, $2x_M+y_M-z_M+2 = 2\times0+(-2)+t-t+2 = 0$, donc M appartient à $\mathscr{P}_1$ et par suite Δ est incluse dans $\mathscr{P}_1$.

De même : $x_M-y_M+z_M-2=0-(-2+t)+t-2=2-t+t-2 = 0$, donc M appartient à $\mathscr{P}_2$ et par suite Δ est incluse dans $\mathscr{P}_2$.

Ainsi, Δ est incluse dans l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ (qui est une droite), donc Δ est l'intersection de ces deux plans.

On considère le point A(1 ; 1 ; 1) et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\,;\,-2+t\,;\,t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. $AM_t^2 = (0-1)^2+(-2+t-1)^2+(t-1)^2 = 1+\left(9-6t+t^2\right)+\left(t^2-2t+1\right) = 2t^2-8t+11$
Donc $AM_t = \sqrt{2t^2-8t+11}$.

b. Le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite Δ, donc la longueur AH réalise le minimum des longueurs AM_t où M_t est un point de Δ.
Il faut donc chercher le minimum de $\sqrt{2t^2-8t+11}$, donc le minimum de $2t^2-8t+11$.
D'après les propriétés de la fonction du second degré, le minimum de $f(x) = ax^2+bx+c$ quand $a>0$, est réalisé pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ et vaut $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.
Donc le minimum de $2t^2-8t+11$ est réalisé pour $t = -\dfrac{-8}{2\times 2} = 2$, et vaut $2\times 2^2-8\times 2+11 = 3$.
On en déduit que $AH = \sqrt{3}$.

4. On note $\mathscr{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}_1$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.
La droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ donc le vecteur $\overrightarrow{n_1}$, normal au plan $\mathscr{P}_1$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$. De plus la droite $\mathscr{D}_1$ passe par le point A. Elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_A+2t \\ y &=& y_A+t \\ z &=& z_A-t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{c'est-à-dire} \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 1-t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$

b. La droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ donc le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}_1$ est le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et de $\mathscr{P}_1$; ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 1-t \\ 2x+y-z+2 &=& 0 \end{array}\right.$$

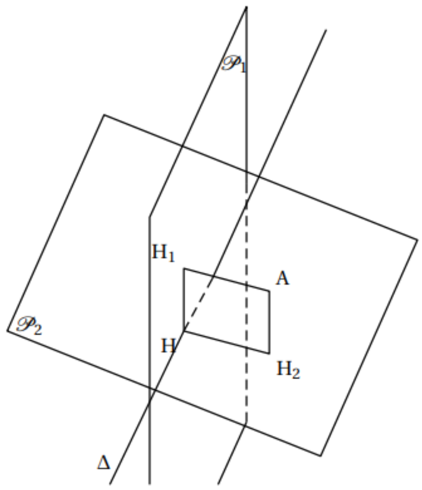
Donc t vérifie $2(1+2t)+(1+t)-(1-t)+2 = 0$, soit $2+4t+1+t-1+t+2 = 0$, ce qui donne $t = -\dfrac{2}{3}$.

$x = 1+2t = 1-\dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$, $y = 1+t = 1-\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ et $z = 1-t = 1+\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$

Le point H_1 a donc pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,2)$.
Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.



Le vecteur $\overrightarrow{AH_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}-1\\ \frac{1}{3}-1\\ \frac{5}{3}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{H_2H}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0-\frac{4}{3}\\ 0-\frac{2}{3}\\ 2-\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AH_1}=\overrightarrow{H_2H}$ donc la quadrilatère AH_1HH_2 est un parallélogramme.

La droite (AH_1) est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ et H_1 appartient à ce plan ; donc (AH_1) est perpendiculaire à toutes les droites de $\mathscr{P}_1$ passant par H_1, en particulier la droite (HH_1).

Le parallélogramme AH_1HH_2 possède un angle droit donc c'est un rectangle.