Première Maths Groupe 4 — Corrigé du DS12 — Juin 2023

1

Exercice I

1) a) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 3$

$f'(x) = 2\times 3x^2 + 5\times 2x - 1$

$\boxed{f'(x) = 6x^2 + 10x - 1}$

$g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = e^x - 1 \\ u'(x) = e^x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^x + 1 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$.

$g'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$g'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x+1)^2}$

$\boxed{g'(x)} = \dfrac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2} = \boxed{\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}}$.

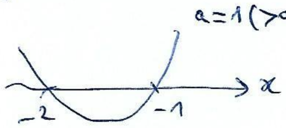
2) $k(x) = (x^2 + x + 1)e^x = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2 + x + 1 \\ u'(x) = 2x + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$.

$k'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$k'(x) = (2x+1)e^x + (x^2 + x + 1)e^x$

$\boxed{k'(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x}$

Or pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $k'(x)$ a le même signe que $x^2 + 3x + 2$: ce trinôme a pour racines évidentes -1 et -2, et ici $a = 1 (> 0)$.



$k(-2) = ((-2)^2 - 2 + 1)e^{-2} = 3e^{-2} = \dfrac{3}{e^2}$

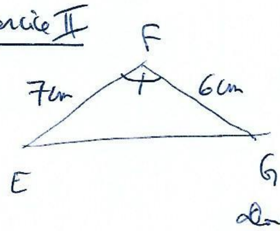
$k(-1) = ((-1)^2 - 1 + 1)e^{-1} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

donc :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
Signe de x^2+3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$		↗	$\dfrac{3}{e^2}$	↘	$\dfrac{1}{e}$	↗	

Exercice II

1)



La relation d'Al-Kashi appliquée au triangle EFG dit que :

$EG^2 = FE^2 + FG^2 - 2\times FE\times FG\times \cos(\widehat{EFG})$

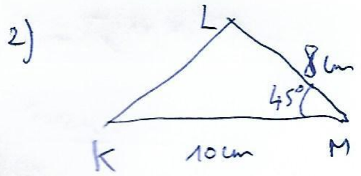
donc : $11^2 = 7^2 + 6^2 - 2\times 7\times 6\times \cos(\widehat{EFG})$

donc : $121 = 49 + 36 - 84\cos(\widehat{EFG})$

$84\cos(\widehat{EFG}) = 49 + 36 - 121 = -36$

$\cos(\widehat{EFG}) = -\dfrac{36}{84} = -\dfrac{3}{7}$, donc $\widehat{EFG} = \arccos\left(-\dfrac{3}{7}\right)$ et $\boxed{\widehat{EFG} \approx 115{,}4^\circ \text{ à } 0{,}1^\circ \text{ près}}$

2)



D'après la relation d'Al-Kashi :

$$KL^2 = MK^2 + ML^2 - 2 \times MK \times ML \times \cos(\widehat{LMK})$$

Donc : $KL^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times \cos(45°)$

$KL^2 = 100 + 64 - 160 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 164 - 80\sqrt{2}$.

Donc comme $KL > 0$, $KL = \sqrt{164 - 80\sqrt{2}}$

$$\boxed{KL \approx 7{,}1 \text{ à } 0{,}1 \text{ cm près}}$$

Exercice III

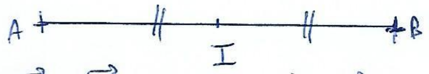
$M(x;y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ avec : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$

$M(x;y) \in \mathcal{D} \iff 3(x+1) + (-5)(y-2) = 0$

$M(x;y) \in \mathcal{D} \iff 3x + 3 - 5y + 10 = 0 \iff 3x - 5y + 13 = 0$.

$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } \mathcal{D} \text{ est donc : } 3x - 5y + 13 = 0.}$

Exercice IV



1) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$.

Donc $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + \underbrace{2\overrightarrow{MI} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}})}_{0}$. OR $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ car I est le milieu de $[AB]$.

et $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$ pour tout vecteur $\vec{u}$.

Donc : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 3^2 + 3^2$ car $IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ car I = milieu de $[AB]$.

Donc $\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 18}$.

2) $MA^2 + MB^2 = 10 \overset{4.1)}{\iff} 2MI^2 + 18 = 10 \iff 2MI^2 = 10 - 18 = -8 \iff MI^2 = -\frac{8}{2} = -4$.

OR $-4 < 0$ et $MI^2 \geqslant 0$, donc il n'existe aucun point du plan tel que $MA^2 + MB^2 = 10$.

3) $MA^2+MB^2=26 \overset{q.1}{\iff} 2MI^2+18=26 \iff 2MI^2=26-18=8 \iff MI^2=\frac{8}{2}=4$ ③

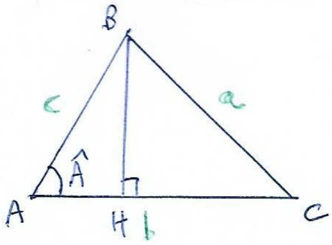
$\iff MI=2$ car $MI \geq 0$.

Ainsi, $MA^2+MB^2=26 \iff MI=2 \iff M$ appartient au cercle de centre I et de rayon 2.

$\boxed{\text{L'ensemble cherché est donc le cercle de centre } I \text{ et de rayon } 2}$.

Exercice IV

1)



Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC) :

$S=\frac{AC\times BH}{2}$ et dans le triangle AHB rectangle en H, $\sin(\hat{A})=\frac{HB}{AB}$

Donc $HB=AB\times\sin(\hat{A})$

$HB=c\sin(\hat{A})$.

D'où $\boxed{S=\frac{b\times c\sin(\hat{A})}{2}}$ (on rappelle que $AC=b$).

2) D'après la relation d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos(\hat{A})$

donc : $a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos(\hat{A})$

donc $2bc\times\cos(\hat{A})=b^2+c^2-a^2$

$\boxed{\cos(\hat{A})=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$ car $\begin{cases} b>0 \\ c>0 \\ 2>0 \end{cases}$ donc $2bc\neq 0$.

③ D'après le cours de trigo. $\cos^2(\hat{A})+\sin^2(\hat{A})=1$, de sorte que :

$\sin^2(\hat{A})=1-\cos^2(\hat{A})=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$

Or $0<\hat{A}<180°$, donc $\sin(\hat{A})>0$, donc $\sin(\hat{A})=\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$

$\sin(\hat{A})=\sqrt{1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}}=\sqrt{\frac{4b^2c^2}{4b^2c^2}-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}}=\sqrt{\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}}$

d'après la 3ième identité remarquable $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$, donc :

$$\sin(\hat{A})=\sqrt{\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-(b^2+c^2-a^2))}{(2bc)^2}}=\frac{\sqrt{(b^2+c^2+2bc-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}}{2bc}$$

Donc $$\boxed{\sin(\hat{A})=\frac{\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}}{2bc}}$$

4) Grâce à q.1), $$S=\frac{bc\times\sin(\hat{A})}{2}\overset{q.3}{=}\frac{bc\times\frac{\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}}{2bc}}{2}$$

$$S=\frac{\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}}{4}$$

Enfin : $2bc+b^2+c^2=(b+c)^2$ et $2bc-b^2-c^2=-(b^2-2bc+c^2)=-(b-c)^2$

alors $$S=\frac{\sqrt{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}}{4}$$ et toujours d'après l'(IR3)

on a : $$S=\frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-(b-c))}}{4}$$

$$S=\frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4}$$

Ce qui se réécrit, en tenant compte de la commutativité de l'addition :

$$\boxed{S=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}}{4}}$$

5) $d=\frac{a+b+c}{2}$ donc $a+b+c=2d$; $a-b+c=a+b+c-2b=2d-2b=2(d-b$

et $a+b-c=a+b+c-2c=2d-2c=2(d-$

et enfin : $b+c-a=b+c+a-2a=2d-2a=2(d-a)$.

En réinjectant ces valeurs dans la relation (1) on a :

$$S = \frac{\sqrt{2d \times 2(d-b) \times 2(d-c) \times 2(d-a)}}{4} = \frac{\sqrt{16d(d-a)(d-b)(d-c)}}{4}$$ 5

$$S = \frac{\sqrt{16} \times \sqrt{d(d-a)(d-b)(d-c)}}{4}$$ et $\sqrt{16} = 4$

donc $\boxed{S = \sqrt{d(d-a)(d-b)(d-c)}}$ Yeah!

<u>Application :</u> $AB = 8\text{cm}$

$AC = 7\text{cm}$ | donc $d = \frac{8+7+5}{2} = 10$ cm.

$BC = 5$ cm

et $S = \sqrt{10(10-8)(10-7)(10-5)} = \sqrt{10 \times 2 \times 3 \times 5}$

$\boxed{S = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \ \text{cm}^2}$