Exercice I

Question 1 :

Réponse $\boxed{B}$: H est convexe sur $[0;3]$ (car $H' = h$ et h croît sur $[0;3]$).

Question 2 :

Réponse A : facile en drivant la réponse A, on obtient sans peine l'expression de f par dérivée d'un produit.

Exercice II

a) $f(x) = e^{5x} + x^2 + 6x - 1$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{F(x)} = \frac{e^{5x}}{5} + \frac{x^3}{3} + 6\times\frac{x^2}{2} - x = \boxed{\frac{e^{5x}}{5} + \frac{x^3}{3} + 3x^2 - x}$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$: donc <u>F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$</u>.

b) $g(x) = x e^{x^2+3} = x e^{u(x)}$ où $u(x) = x^2+3$, $u'(x) = 2x$.

$g(x) = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2+3} = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$

donc G définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{G(x) = \frac{1}{2} e^{u(x)} = \frac{1}{2} e^{x^2+3} \text{ est une primitive de } g \text{ sur } \mathbb{R}}$.

c) $x > 0$ et $h(x) = \frac{e^{-x} - 5}{e^{-x} + 5x}$. Posons $\begin{cases} u(x) = e^{-x} + 5x \\ u'(x) = -e^{-x} + 5 = -(e^{-x} - 5). \end{cases}$

Donc $h(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$. La fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par : $H(x) = -\ln(|u(x)|)$ est une primitive de h sur $]0;+\infty[$.

$\boxed{H(x) = -\ln(e^{-x} + 5x)}$

2)

2) $x>0$ et $k(x)=x^2(3\ln(x)+1)$.

$K(x)=x^3\ln(x)=u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x)=x^3 \\ u'(x)=3x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x)=3\ln(x)+1 \\ v'(x)=\frac{3}{x}+0=\frac{3}{x} \end{cases}$.

K est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

et $K'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=3x^2\ln(x)+x^3\times\frac{1}{x}=3x^2\ln(x)+x^2=x^2(3\ln(x)+1)=k(x)$

donc K est bien une primitive de k sur $]0;+\infty[$.

Les primitives de k sur $]0;+\infty[$ sont donc les fonctions définies par :

$G(x)=K(x)+\alpha$, où $\alpha\in\mathbb{R}$.

$G(e)=0 \iff K(e)+\alpha=0 \iff \alpha=-K(e)=-e^3\ln(e)=-e^3$.

donc $G(x)=x^3\ln(x)-e^3$ est la primitive de k qui s'annule lorsque $x=e$.

3)

2) $x>1$ et $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ f est dérivable (quotient) sur $]1;+\infty[$ et :

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2\times1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Par suite, pour $x>1$: $(x-1)f'(x)+f(x)=(x-1)\times\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}+\dfrac{x^2}{x-1}$

$$(x-1)f'(x)+f(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)}+\frac{x^2}{x-1}=\frac{2x^2-2x}{x-1}=\frac{2x(x-1)}{x-1}$$

donc : $(x-1)f'(x)+f(x)=2x$: f est bien solution sur $]1;+\infty[$ de l'E.D. : $(x-1)y'+y=2x$.

Exercice III

$(E) : y' + 3y = e^{-2x}$.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = e^{-2x}$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -2e^{-2x}$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) + 3u(x) = -2e^{-2x} + 3e^{-2x} = e^{-2x}$

donc u est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

b) $(E_0) : y' + 3y = 0$ c'est à dire $y' = -3y$

$$\boxed{S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{-3x} \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}}.$$

c) Si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 3f(x) = e^{-2x}$.

de plus, q a), u est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) + 3u(x) = e^{-2x}$.

Par suite $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 3f(x) - (u'(x) + 3u(x)) = e^{-2x} - e^{-2x} = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - u'(x) + 3(f(x) - u(x)) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(f-u)'(x) + 3(f-u)(x) = 0$, donc $f - u$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement : Si $f - u$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f-u)'(x) + 3(f-u)(x) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - u'(x) + 3f(x) - 3u(x) = 0$

$$f'(x) + 3f(x) = \underbrace{u'(x) + 3u(x)}_{= e^{-2x} \text{ d'après q a)!}}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 3f(x) = e^{-2x}$, donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ équivaut à } f - u \text{ solution de } (E_0) \text{ sur } \mathbb{R}}$

Donc d'après q. b) : $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f-u)(x) = ke^{-3x}$

$f(x) - u(x) = ke^{-3x}$

$\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ke^{-3x} + u(x)$ avec $u(x) = e^{-2x}$.

$f(x) = ke^{-3x} + e^{-2x}$

$$\boxed{S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{-3x} + e^{-2x} \end{array}; k \in \mathbb{R} \right\}}.$$

Exercice IV

1)

$(E) : 2y'' + y' = 1$. où y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$z = y'$, donc $z' = (y')' = y''$

Par suite $(E) : 2y'' + y' = 1$ équivaut donc à $\boxed{2z' + z = 1 : (E')}$.

2) Résolvons (E') sur $\mathbb{R}$: $2z' + z = 1$ équivaut à $z' = \frac{-z+1}{2}$ c'est-à-dire : $z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$

qui est de la forme : $z' = az + b$ avec : $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.

D'après le cours, les fonctions solution de (E') sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $z(x) = ke^{-\frac{1}{2}x} - \frac{b}{a} = ke^{-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{(-\frac{1}{2})}$

$z(x) = ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$ où $k \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E')} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}x} + 1 \end{array} ;\ k \in \mathbb{R} \right\}}$$

Enfin d'après (q.1) on a donc y solution de (E) sur $\mathbb{R}$ équivaut à $z = y'$ solution de (E') sur $\mathbb{R}$.

donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ équivaut à : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$

et <u>par primitivation</u>, $f(x) = \frac{ke^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}} + x + \lambda = Ke^{-\frac{1}{2}x} + x + \lambda$ où $K \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

on pose $K = \frac{k}{-\frac{1}{2}} = -2k$.

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Ke^{-\frac{1}{2}x} + x + \lambda \end{array} ;\ (K;\lambda) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

Exercice V

Exercice V

4

N est solution sur $[0;+\infty[$ de (E) : $y'=ay$ où $a\in\mathbb{R}$.

1a) $\boxed{N(t)=ke^{at} \text{ où } k\in\mathbb{R}}$.

1b) $N(0)=10^9 \iff ke^0=10^9 \iff k=10^9$ car $e^0=1$.

Donc $\boxed{N(t)=10^9e^{at}}$

1c) $N(18)=\frac{N(0)}{2}=\frac{10^9}{2} \iff 10^9e^{18a}=\frac{10^9}{2} \iff e^{18a}=\frac{1}{2}$

$\iff \ln(e^{18a})=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\iff 18a=-\ln(2)$

$\iff \boxed{a=\frac{-\ln(2)}{18}}$

$\boxed{\text{Par suite, pour } t\geq 0 \text{, on a : } N(t)=10^9e^{-\frac{\ln(2)}{18}t}}$

$N'(t)=10^9\times\left(\frac{-\ln(2)}{18}\right)e^{-\frac{\ln(2)}{18}t}$ avec $10^9>0$; $-\ln(2)<0$; $18>0$ et $e^{-\frac{\ln(2)}{18}t}>0$.

Donc, $\underline{\forall t\in[0;+\infty[,\ N'(t)<0}$: $\boxed{N \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[}$.

1d) $\frac{-\ln(2)}{18}<0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{-\ln(2)}{18}t=-\infty$, et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$, donc par <u>limite de fonctions composées</u>, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{\ln(2)}{18}t}=0$, et par <u>limite de produit</u>, $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=0}$

1e) $N(t)<100 \iff 10^9e^{-\frac{\ln(2)}{18}t}<10^2 \iff e^{-\frac{\ln(2)}{18}t}<\frac{10^2}{10^9}$

$N(t)<100 \iff e^{-\frac{\ln(2)}{18}t}<10^{-7} \iff \ln\left(e^{-\frac{\ln(2)}{18}t}\right)<\ln(10^{-7})$ car ln croît strictement sur $]0;+\infty[$.

$N(t)<100 \iff -\frac{\ln(2)}{18}t<-7\ln(10)$

$\underline{\underline{N(t)<100}} \iff t>\frac{-7\times18\ln(10)}{-\ln(2)} \iff \underline{\underline{t>\frac{126\ln(10)}{\ln(2)}}}$.

Grâce à une calculatrice, $\frac{126\ln(10)}{\ln(2)}\approx 418{,}56$, donc $\underline{t\geq 419 \text{ (en jours)}}$

<u>Au bout de 419 jours, le corps ne sera plus considéré comme radioactif.</u>

Exercice VI

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}.$$

a.

$$\begin{aligned} \frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}} &= \frac{3}{1+2\times\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}}} \\ &= \frac{3}{\frac{e^{\frac{x}{4}}+2}{e^{\frac{x}{4}}}} \\ &= \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{4} = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} e^{y} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{4}} = 0$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}} = 3 \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

Par un raisonnement analogue, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Partie B

1. a. Les solutions de l'équation différentielle (E_1) :$y' = \frac{y}{4}$ sont les fonctions y définies par :

$$y(t) = Ke^{\frac{t}{4}}$$

avec K constante réelle.

b. Comme g est une solution de l'équation différentielle (E_1), alors $g(t) = Ke^{\frac{t}{4}}$.
Donc $g(0) = Ke^{\frac{0}{4}} = K$ or $g(0) = 1$ donc $K = 1$.
Ainsi

$$g(t) = e^{\frac{t}{4}}$$

c. La population dépassera 300 rongeurs pour la première fois lorsque

$$\begin{aligned} g(t) \geqslant 3 &\iff \mathrm{e}^{\frac{t}{4}} \geqslant 3 \\ &\iff \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{4}}\right) \geqslant \ln 3 \\ &\iff \frac{t}{4} \geqslant \ln 3 \\ &\iff t \geqslant 4\ln 3 \end{aligned}$$

2. a. Considérons une fonction u strictement positive vérifiant la condition (E_2), alors on a :

$$\left\{\begin{array}{lll} u'(t) & = & \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

Intéressons-nous à la fonction h définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, vérifiant $h(t) = \frac{1}{u(t)}$. Alors :

$h(0) = \frac{1}{u(0)} = \frac{1}{1} = 1$ et $h'(t) = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$.

Mais $u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12}$ et $u(t) > 0$, donc, en divisant par $-u^2(t)$ l'égalité précédente, on obtient :

$$-\frac{u'(t)}{u^2(t)} = -\frac{u(t)}{4u^2(t)} - \frac{[u(t)]^2}{12u^2(t)} \iff -\frac{u'(t)}{u^2(t)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{12}.$$

C'est-à-dire :

$$h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}.$$

Ainsi la fonction h satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_3)\left\{\begin{array}{lll} h'(t) & = & -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

Comme nous avons procédé par équivalence, la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions (E_3).

b. Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ sont les fonctions y définies par :

$$y(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} - \frac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{4}} = C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$$

.

Ainsi $h(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$, or $h(0) = 1$ donc $C\mathrm{e}^{-\frac{0}{4}} + \frac{1}{3} = 1 \iff C = \frac{2}{3}$ donc

$$h(t) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(2\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + 1\right)$$

Or

$$u(t) = \frac{1}{h(t)} \text{ donc } u(t) = \frac{1}{\frac{1}{3}\left(2\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + 1\right)} = \frac{3}{2\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + 1}.$$

c. Dans ce modèle, la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$ s'approche de 3.

Ce calcul a été effectué dans la partie A.