Exercice I

Question 1 : Réponse $\boxed{C}$: $-OA \times OB$.

Question 2 : Réponse $\boxed{C}$: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}=0$.

Question 3 : Réponse $\boxed{D}$: $\vec{u} \perp (\vec{v}-\vec{w})$

Question 4 : Réponse $\boxed{B}$: $-\frac{R^2}{2}$

Exercice II

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, donc $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Donc $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = xx'+yy' = 5\times(-1)+5\times 1 = -5+5 = 0$.

Donc $\boxed{\vec{u}+\vec{v} \text{ et } \vec{u}-\vec{v} \text{ sont orthogonaux}}$.

Exercice III

$\vec{u}\perp\vec{v}$, donc $\vec{u}.\vec{v}=0$.

$\|2\vec{u}+3\vec{v}\|^2 = (2\vec{u}+3\vec{v})^2 = (2\vec{u})^2 + 2\times 2\vec{u}.(3\vec{v}) + (3\vec{v})^2 = 4\vec{u}^2 + 12\underbrace{\vec{u}.\vec{v}}_{=0} + 9\vec{v}^2$.

$\|2\vec{u}+3\vec{v}\|^2 = 4\|\vec{u}\|^2 + 9\|\vec{v}\|^2$.

Avec la 2nd id. remarquable on a de même : $\|2\vec{u}-3\vec{v}\|^2 = 4\|\vec{u}\|^2 + 9\|\vec{v}\|^2$.

Donc $\boxed{\|2\vec{u}+3\vec{v}\|^2 - \|2\vec{u}-3\vec{v}\|^2 = 0}$.

Exercice IV

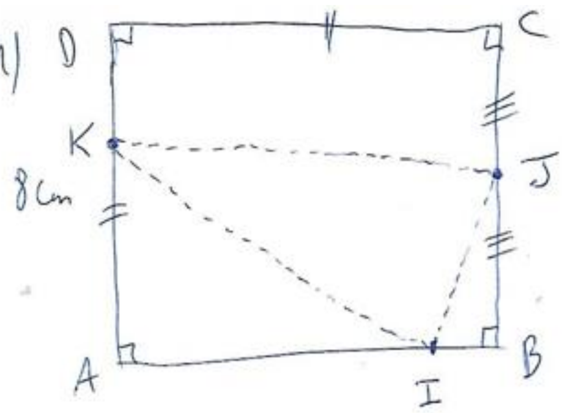
$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0 \iff \overbrace{2m(m-4)+(2m+1)(3-m)}^{xx'+yy'} = 0$$

En développant, on a : $2m^2 - 8m + 6m - 2m^2 + 3 - m = 0$, c'est-à-dire : $-3m + 3 = 0$ et donc $m = 1$.

L'unique valeur de m pour laquelle ces vecteurs sont orthogonaux est donc égale à 1.

Exercice V

1)



2) On se place dans le R.O.N $\left(A ; \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} ; \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}\right)$:

$A(0;0)$; $B(8;0)$; $D(0;8)$; $C(8;8)$.

J est le milieu de [BC], donc $J\left(\frac{8+8}{2} ; \frac{0+8}{2}\right)$ c'est à dire : $\boxed{J(8;4)}$

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$, donc $\boxed{I(7;0)}$: En effet, $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{8}\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}x_I-8\\0\end{pmatrix}$

donc $-1 = x_I - 8$, donc $x_I = -1+8 = 7$

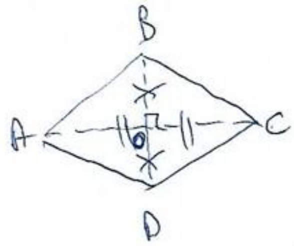
$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, donc $\boxed{K(0;6)}$ → idem...

Par suite : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}8-7=1\\4-0=4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}8-0=8\\4-6=-2\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{KJ} = xx'+yy' = 1\times 8 + 4\times(-2) = 8-8 = 0.$

donc $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{KJ}$, et par suite, $\boxed{\text{(IJ) et (KJ) sont perpendiculaires en J.}}$

Exercice VI



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{AO}\cdot\underbrace{(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$$

$= \vec{0}$ car O est le milieu de [BD] vu que ABCD est un losange de centre O

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AO^2 - OB \times OD$ car $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont opposés.

$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}} = 2^2 - 1\times 1 = 4 - 1 = \boxed{3}$ $\quad (\underbrace{AO = 2 \text{ et } OB = 1}_{\text{car losange donc diagonales se coupent en}})$.

Exercice VII

Méthode 1 : On se place dans le repère orthonormé $(C ; \frac{1}{6}\overrightarrow{CD} ; \frac{1}{4}\overrightarrow{CA})$.

Facilement, on a : $E(1,5 ; 4)$; $C(0;0)$; $D(6;0)$ et par suite :

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-1,5\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}4,5\\-4\end{pmatrix}$.

alors $\boxed{\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}} = xx' + yy' = -1,5\times 4,5 + (-4)\times(-4) = -6,75 + 16 = \boxed{9,25}$ (*

Ensuite, en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles CAE rectangle en A et EBD rectangle en B, on obtient :

$EC^2 = AC^2 + AE^2$

$EC^2 = 4^2 + 1,5^2 = 18,25$

$\boxed{EC} = \sqrt{18,25} = \sqrt{\frac{73}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{73}}{2}}$

et

$ED^2 = BE^2 + BD^2 = 4,5^2 + 4^2$

$ED^2 = 20,25 + 16 = 36,25$

$\boxed{ED} = \sqrt{36,25} = \sqrt{\frac{145}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{145}}{2}}$.

Or, $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED} = \|\overrightarrow{EC}\|\times\|\overrightarrow{ED}\|\times\cos(\widehat{CED})$

$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED} = \frac{\sqrt{73}}{2}\times\frac{\sqrt{145}}{2}\times\cos(x)$ (**)

(*) et (**) font que : $9{,}25 = \frac{\sqrt{73}\times\sqrt{145}}{4}\times\cos(x)$

$$\frac{37}{4} = \frac{\sqrt{73}\times\sqrt{145}}{4}\times\cos(x)$$

$$\cos(x) = \frac{37}{\sqrt{73}\times\sqrt{145}}$$

$$x = \arccos\left(\frac{37}{\sqrt{73}\times\sqrt{145}}\right)$$

$$\boxed{x \approx 68{,}9^\circ \text{ à } 0{,}1^\circ \text{ près}}$$

Exercice VIII

Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ (dans le but de prouver que cette somme est nulle) :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}$

Soit I le milieu de [BC] : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}$

donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}_{\vec{0} \text{ car I est le milieu de [BC]}} = 2\overrightarrow{AI}$.

donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}}$.

Enfin, ABC est isocèle en A, donc $(AI)\perp(BC)$ (Médiane issue du sommet principal = hauteur).

donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

Par suite, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}$

Exercice IX

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\|\vec{u}\|=0$ ou $\|\vec{v}\|=0$, et $\vec{u}.\vec{v}=0$ et la double inégalité est vraie, c'est même une égalité.

Supposons $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$:

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$.

Or, $-1\leqslant\cos(\vec{u};\vec{v})\leqslant 1$

donc $-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\leqslant \underbrace{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})}\leqslant\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ car $\underbrace{\|\vec{u}\|}_{>0}\times\underbrace{\|\vec{v}\|}_{>0}>0$.

Donc : $-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\leqslant\vec{u}.\vec{v}\leqslant\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.