

Exercice I

Question 1: Réponse **C** :  $-OA \times OB$ .

Question 2: Réponse **C** :  $\vec{BA} \cdot \vec{CA} = 0$ .

Question 3: Réponse **D** :  $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$

Question 4: Réponse **B** :  $-\frac{R^2}{2}$

Exercice II

$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , donc  $\underline{\underline{\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}}}$  et  $\underline{\underline{\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

donc  $\underline{\underline{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = x^2 + y^2 = 5 \times (-1) + 5 \times 1 = -5 + 5 = 0}}$ .

donc  $\boxed{\vec{u} + \vec{v} \text{ et } \vec{u} - \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}}$

Exercice III

$\vec{u} \perp \vec{v}$ , donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

$\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = (2\vec{u})^2 + 2 \times 2\vec{u} \cdot (3\vec{v}) + (3\vec{v})^2 = 4\vec{u}^2 + 12\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_0 + 9\vec{v}^2$ .

$\underline{\underline{\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 = 4\|\vec{u}\|^2 + 9\|\vec{v}\|^2}}$ .

Avec la 2<sup>de</sup> id. remarquable on a de même :  $\underline{\underline{\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|^2 = 4\|\vec{u}\|^2 + 9\|\vec{v}\|^2}}$ .

donc  $\boxed{\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 - \|2\vec{u} - 3\vec{v}\|^2 = 0}$ .

**Exercice IV**

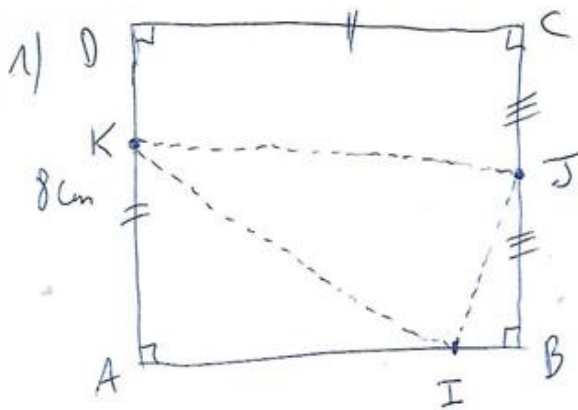
$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \overbrace{2m(m-4) + (2m+1)(3-m)}^{xx'+yy'} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2m^2} - 8m + 6m - \cancel{2m^2} + 3 - 3m = 0$$

$$\Leftrightarrow -5m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{5} \quad \mathcal{J} = \left\{ \frac{3}{5} \right\}$$

$\frac{3}{5}$  est l'unique réel pour lequel  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

**Exercice V**



2) On se place dans R.O.N (A;  $\frac{1}{8}\vec{AB}$ ;  $\frac{1}{8}\vec{AD}$ ):

$A(0;0)$ ;  $B(8;0)$ ;  $D(0;8)$ ;  $C(8;8)$ .

J est le milieu de [BC], donc  $J\left(\frac{8+8}{2}; \frac{0+8}{2}\right)$  c'est à dire:  $J(8;4)$

$\vec{BI} = \frac{1}{8}\vec{BA}$ , donc  $I(7;0)$ : En effet,  $\vec{BA} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$  donc  $\frac{1}{8}\vec{BA} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{BI} \begin{pmatrix} x_I - 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{DK} = \frac{1}{4}\vec{DA}$ , donc  $K(0;6)$  → idem ...

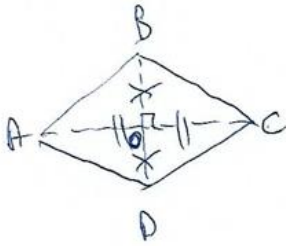
donc  $-1 = x_I - 8$ , donc  $x_I = -1 + 8 = 7$

Par suite:  $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 8-7=1 \\ 4-0=4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{KJ} \begin{pmatrix} 8-0=8 \\ 4-6=-2 \end{pmatrix}$

et  $\vec{IJ} \cdot \vec{KJ} = xx'+yy' = 1 \times 8 + 4 \times (-2) = 8 - 8 = 0$ .

donc  $\vec{IJ} \perp \vec{KJ}$ , et par suite,  $(IJ)$  et  $(KJ)$  sont perpendiculaires en J.

### Exercice VI



$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = (\vec{AO} + \vec{OB}) \cdot (\vec{AO} + \vec{OD}) = AO^2 + AO \cdot (\vec{OB} + \vec{OD}) + \vec{OB} \cdot \vec{OD}$$

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = AO^2 - OB \times OD$  car  $\vec{OB}$  et  $\vec{OD}$  sont opposés.  $\overset{||}{\Rightarrow}$  car O est le milieu de  $[BD]$   
 Vu que ABCD est un losange de centre O  
 (AO=2 et OB=1).

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AD}} = 2^2 - 1 \times 1 = 4 - 1 = \boxed{3}$$

Car losange donc diagonales se coupent en O.

### Exercice VII

Méthode 1 : on se place ds le repère orthonormé  $(C; \frac{1}{6}\vec{CD}; \frac{1}{4}\vec{CA})$ .

Facilement, on a :  $E(1,5; 4)$  ;  $C(0; 0)$  ;  $D(6; 0)$  et par suite :

$$\vec{EC} \begin{pmatrix} -1,5 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{ED} \begin{pmatrix} 4,5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

alors  $\boxed{\vec{EC} \cdot \vec{ED}} = xx' + yy' = -1,5 \times 4,5 + (-4) \times (-4) = -6,75 + 16 = \boxed{9,25} *$

Ensuite, on applique le théorème de Pythagore aux triangles CAE rectangle en A et EBD rectangle en B, on obtient :

$$EC^2 = AC^2 + AE^2$$

$$EC^2 = 4^2 + 1,5^2 = 18,25$$

$$\boxed{EC} = \sqrt{18,25} = \sqrt{\frac{73}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{73}}{2}}$$

et  $ED^2 = BE^2 + BD^2 = 4,5^2 + 4^2$

$$ED^2 = 20,25 + 16 = 36,25$$

$$\boxed{ED} = \sqrt{36,25} = \sqrt{\frac{145}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{145}}{2}}$$



$$\text{Or, } \vec{EC} \cdot \vec{ED} = \|\vec{EC}\| \times \|\vec{ED}\| \times \cos(\widehat{CED})$$

$$\vec{EC} \cdot \vec{ED} = \frac{\sqrt{73}}{2} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \cos(\alpha) \quad (**)$$

(\*) et (\*\*) font que :

$$\frac{9,25}{4} = \frac{\sqrt{73} \times \sqrt{145}}{4} \times \cos(\alpha)$$

$$\frac{37}{4} = \frac{\sqrt{73} \times \sqrt{145}}{4} \times \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{37}{\sqrt{73} \times \sqrt{145}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{37}{\sqrt{73} \times \sqrt{145}}\right)$$

$$\boxed{\alpha \approx 68,9^\circ \text{ à } 0,1 \text{ pr}} \quad \leftarrow$$

### Exercice VIII

Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AC} \cdot \vec{BC}$  (le but de prouver que cette somme est nulle):

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AC} \cdot \vec{BC} = (\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{BC}$$

Soit I le milieu de [BC]:  $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$  et  $\vec{AC} = \vec{AI} + \vec{IC}$

$$\text{alors } \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI} + \underbrace{\vec{IB} + \vec{IC}}_{\vec{0} \text{ car I est le milieu de [BC]}} = 2\vec{AI}$$

$$\text{alors } \boxed{\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AC} \cdot \vec{BC} = 2\vec{AI} \cdot \vec{BC}}$$

Enfin, ABC est isocèle en A, donc  $(AI) \perp (BC)$  (Médiane issue du sommet principal = Hauteur).

$$\text{alors } \vec{AI} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\text{En suite, } \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\text{alors } \boxed{\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\vec{AC} \cdot \vec{BC}}$$

### Exercice IX

Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , alors  $\|\vec{u}\| = 0$  ou  $\|\vec{v}\| = 0$ , et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  et la double inégalité est vraie, c'est même une égalité.

Supposons  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

$$\text{Or, } -1 \leq \cos(\vec{u}, \vec{v}) \leq 1$$

$$\text{alors } -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \leq \underbrace{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})}_{\vec{u} \cdot \vec{v}} \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

$$\text{Car } \underbrace{\|\vec{u}\|}_{>0} \times \underbrace{\|\vec{v}\|}_{>0} > 0.$$

$$\text{alors : } -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$