**Exercice I**

a) $f(x) = -x+1+e^{3x+4}$

$\boxed{f'(x) = -1+3e^{3x+4}}$

Rappel : En posant $u(x)=3x+4$, $u'(x)=3$ et $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

b) $g(x) = 2x^3+3x+1$

$g'(x) = 2\times 3x^2+3$

$\boxed{g'(x) = 6x^2+3}$

$h(x) = (2x^3+3x+1)^4 = (g(x))^4$

$h'(x) = 4g'(x)(g(x))^3$

$\boxed{h'(x) = 4(6x^2+3)(2x^3+3x+1)^3}$

c) $i(x) = \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x)=e^x \\ u'(x)=e^x \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x)=x \\ v'(x)=1 \end{cases}$

$\boxed{i'(x)} = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{e^x\times x - e^x\times 1}{x^2} = \boxed{\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}}$

d) $j(x) = \dfrac{1}{1+e^{-2x}} = \dfrac{1}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} v(x)=1+e^{-2x} \\ v'(x)=0+(-2)e^{-2x} = -2e^{-2x} \end{cases}$

$\boxed{j'(x)} = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)} = \boxed{\dfrac{2e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}}$

e) $k(x) = \sqrt{x^4+3e^{-x^2}} = \sqrt{u(x)}$ où $\begin{cases} u(x)=x^4+3e^{-x^2} \\ u'(x)=4x^3+3\times(-2x)e^{-x^2} = 4x^3-6xe^{-x^2} \end{cases}$

$k'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{4x^3-6xe^{-x^2}}{2\sqrt{x^4+3e^{-x^2}}}$

$\boxed{k'(x)} = \dfrac{2x(2x^2-3e^{-x^2})}{2\sqrt{x^4+3e^{-x^2}}} = \boxed{\dfrac{x(2x^2-3e^{-x^2})}{\sqrt{x^4+3e^{-x^2}}}}$

**Exercice II**

1) $f(x) = (-x+1)e^{2x} = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = -x+1 \\ u'(x) = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{2x} \\ v'(x) = 2e^{2x} \end{cases}$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit et composé de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -e^{2x} + (-x+1) \times 2e^{2x} = e^{2x} \times (-1 + 2(-x+1))$

$f'(x) = e^{2x}(-1-2x+2)$

$$\boxed{f'(x) = (-2x+1)e^{2x}}$$

2) Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ : Pour tout réel $x$, $e^{2x} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-2x+1$.

Ainsi, $f'(x) \geq 0$ équivaut à $-2x+1 \geq 0$ c'est à dire $-2x \geq -1$ et donc à $x \leq \frac{-1}{-2}$

/!\ On divise par $-2$ (et $-2 < 0$) les deux membres de l'inégalité donc on change son sens !!

$f'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$

Par suite, on a :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\frac{e}{2}$ | $\searrow$ | |

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}+1\right)e^{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e = \frac{e}{2}$

3) Autant que de solution qu'a l'équation $f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Or $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ (tableau précédent).

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses (en son point d'abscisse $\frac{1}{2}$).

4) Notons $T_A$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(0\,;f(0))$ avec $f(0) = (-0+1)e^{2\times 0} = 1 \times e^0$

$f(0) = 1$.

$T_A$ a pour équation réduite : $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

et $f'(0) = (-2\times 0+1)e^{2\times 0} = 1$

$$\boxed{y = x+1}$$

5) $f''(x) = -4xe^{2x}$.

Étudions le signe de $f''(x)$ pour avoir la convexité de $f$ :

Pour tout réel $x$, $e^{2x} > 0$, donc $f''(x)$ a le même signe que $-4x$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $f''(x) \geq 0 \iff -4x \geq 0 \iff x \leq \frac{0}{-4} \iff x \leq 0$.

Donc $f$ est convexe sur $]-\infty\,;0]$, concave sur $[0\,;+\infty[$. $\mathcal{C}_f$ a un seul point

[illegible]

**Exercice III**

Question ① : Réponse ⓒ : $\left]-\infty ; \frac{2}{3}\right]$ (En effet, $h''(x) = -6x+4$, et $h''(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{2}{3}$).

Question ② : réponse ⓐ : $\dfrac{x^3+2e^x}{x^3e^x}$ $\left( f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - e^{-x} \right.$
$\left. f''(x) = \dfrac{2x}{(x^2)^2} + e^{-x} = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{2e^x + x^3}{x^3e^x} \right)$

Question ③ : réponse ⓓ : $(c(x))^2 - (s(x))^2 = 1$. (on peut ici procéder par élimination :
Pour $x=0$, $s(0)=0 \to$ a) exclue.
etc...

Question ④ : Réponse ⓒ : $g$ est convexe sur $[1;2]$ car $g'$ croît sur $[1;2]$.

**Exercice IV**

1. Sur l'intervalle $[-3,-1]$, tous les points de la courbe ont une ordonnée négative. VRAIE
2. Sur l'intervalle $]-1\,;\,2[$, on lit que $f'(x) > 0$, donc que $f$ est croissante sur cet intervalle. VRAIE
3. Sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$, on a $f'(x) > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $]-1\,;\,0[$. Or on sait que $f(0) = -1$. D'après la croissance stricte sur l'intervalle tous les points de cet intervalle ont une image par $f$ inférieure à $-1$. FAUSSE
4. Pour $x = 0$, on lit $f'(0) = 1$ et on sait que $f(0) = -1$.
On sait que l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est
$y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y-(-1) = 1x \iff y = x-1$. Cette tangente contient bien le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ car ces cordonnées vérifient l'équation de la tangente. VRAIE

**Exercice V**

1) $f(x) = ax + be^x + e^{-x}$ $(*)$
$\mathscr{C}_f$ passe par $C(0;4)$ donc $f(0)=4$
$x=0$ dans $(*)$
or, $f(0) = a\times 0 + be^0 + e^0 = b\times 1 + 1 = b+1$.
$f(0) = 4 \iff b+1 = 4 \iff \boxed{b=3}$

2) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point $C$ d'abscisse 0
D'après les données, cette tangente est donc la droite $(CD)$.
Par suite, $\boxed{f'(0)} = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{0-4}{2-0} = \dfrac{-4}{2} = \boxed{-2}$

3) $f(x) = ax + 3e^x + e^{-x}$
$\boxed{f'(x) = a + 3e^x - e^{-x}}$

4) Grâce à q.2) et q.4) :
$f'(0) = -2 \iff a + 3e^0 - e^0 = -2 \iff a+3-1 = -2 \iff a = -4$.
Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -4x + 3e^x + e^{-x}}$

**Exercice VI**

1) $\boxed{f'\left(\frac{1}{e}\right)}$ = coefficient directeur de $T_A$ = $\boxed{0}$ car $T_A$ est "horizontale".

$f'(1)$ = coefficient directeur de $T_B$ = -1 (méthode escalier).

2) Une coquille s'est glissée dans l'énoncé : c'était l'équation de $T_B$ qui était ici attendue :

$T_B$ a pour équation réduite : y = mx + p, et d'après la question 1) : m = f'(1) = = -1, donc : y = -x + p.

De plus B(1 ; 2) appartient à $T_B$, donc : 2 = -1 + p, bref, p = 3 et $T_B$ a pour équation réduite : y = -x +3.

Si on se tenait à ce marqué dans l'énoncé de la question 2), alors :

On calcule le coefficient directeur de (AB), noté m, avec : m = $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-e}{1-\frac{1}{e}}=\frac{e(2-e)}{e-1}$.

(AB) a pour équation réduite : y = $\frac{e(2-e)}{e-1}x+p$.

Or B(1 ; 2) appartient à (AB), donc ses coordonnées vérifient l'équation : 2 = $\frac{e(2-e)}{e-1}$ + p , donc p = 2 - $\frac{e(2-e)}{e-1}$ = $\frac{e^2-2}{e-1}$ et

y= $\frac{e(2-e)}{e-1}x+\frac{e^2-2}{e-1}$. Ces deux réponses étaient ici acceptées au vu de la coquille.

3) $f$ semble être concave sur ]0 ; 0,6] et convexe sur [0,6 ; +∞[.

**Exercice VII**

**1.** La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, si c'était la dérivée d'une fonction, cette fonction serait strictement croissante or aucune des deux autres fonctions n'est strictement croissante. Cette fonction ne peut pas être la dérivée d'une des deux autres, c'est donc la fonction $f$.

$f$ étant strictement croissante, sa dérivée est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est donc la fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_3$

Et par élimination, $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction $f''$ (On vérifie que $f'$ est croissante sur $]-\infty\,;\,4]$ et décroissante sur $[4\,;\,+\infty[$ ce qui coïncide avec le signe de $f''(x)$ qui est positive sur $]-\infty\,;\,4]$ et négative sur $[4\,;\,+\infty[$.

$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction $f''$.

$\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction $f$.

$\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction $f'$.

**2.** Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$, courbe représentative de la fonction $f$, au point d'abscisse 4 est égal à $f'(4)$ soit 3 par lecture graphique.

**3.** Les abscisses des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$ sont environ 3 , 4 et 5.

<u>Remarque</u> : si vous n'aviez pas trouvé la réponse à la question 1, on pouvait aussi pour la question 2) procéder comme suit : tracer la tangente à $C_2$ au point d'abscisse 4, puis avec la méthode de l'escalier, on trouve que $f'(4) = 3$ car la tangente passe par les points de coordonnées (3 ; -1) et (5 ; 5).