Exercice I

1) a) $f(x)=0$ $\boxed{\mathcal{S}=\{-2{,}5\,;\,0{,}5\}}$

b) $g(x)=3$ $\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$

c) $f(x)=g(x)$: $\boxed{\mathcal{S}=\{-2\,;\,1\}}$

d) $f(x)>g(x)$: $\boxed{\mathcal{S}=[-3\,;-2[\,\cup\,]1\,;3]}$

2)

x	-3		-1		3
$f(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Exercice II

1) $(4x-3)^2-(x-5)^2=(4x-3+x-5)(4x-3-(x-5))=(5x-8)(4x-3-x+5)$

$\boxed{(4x-3)^2-(x-5)^2=(5x-8)(3x+2)}$

Grâce à la factorisation précédente : $(4x-3)^2-(x-5)^2=0$ équivaut à : $\underbrace{(5x-8)(3x+2)=0}_{\text{Produit Nul!}}$

Ce qui équivaut à : $5x-8=0$ ou $3x+2=0$

$5x=8$ ou $3x=-2$

$x=\frac{8}{5}$ ou $x=-\frac{2}{3}$.

$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{2}{3}\,;\,\frac{8}{5}\right\}}$

2) $(2x+3)^2=-5$

$\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$ Car pour tout réel x, $(2x+3)^2\geqslant 0$ et $-5<0$.

$(x-1)^2=10$ équivaut à : $x-1=-\sqrt{10}$ ou $x-1=\sqrt{10}$

$x=1-\sqrt{10}$ ou $x=1+\sqrt{10}$.

$\boxed{\mathcal{S}=\{1-\sqrt{10}\,;\,1+\sqrt{10}\}}$

3) $f(x)=g(x)$ équivaut à : $x^2=4x^2-15$ donc à $3x^2=15$, donc à $x^2=\frac{15}{3}=5$

$x=-\sqrt{5}$ ou $x=\sqrt{5}$: $\mathcal{S}=\{-\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5}\}$.

Donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont deux points d'intersection $A(-\sqrt{5}\,;f(-\sqrt{5}))$ et $B(\sqrt{5}\,;f(\sqrt{5}))$

avec $f(-\sqrt{5})=(-\sqrt{5})^2=5=f(\sqrt{5})$, donc $\boxed{A(-\sqrt{5}\,;5) \text{ et } B(\sqrt{5}\,;5)}$

Exercice III

0) $\Delta = b^2-4ac$

1) Figure 1 : $a>0$ et $\Delta>0$ Figure 2 : $a<0$ et $\Delta>0$ Figure 3 : $a>0$ et $\Delta=0$ Figure 4 : $a>0$ et $\Delta<0$

Exercice IV

1) a) $2x^2+x-3=0$ est de la forme : $ax^2+bx+c=0$ avec : $a=2$; $b=1$; $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times2\times(-3)=1+24=25=5^2$.

$25>0$, donc $\Delta>0$, donc cette équation a deux solutions : $\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-5}{4}=\dfrac{-6}{4}=\dfrac{-3}{2} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+5}{4}=\dfrac{4}{4}=1 \end{cases}$

$\boxed{S=\{-\frac{3}{2};1\}}$.

b) $(x-8)(4-2x)=-3x^2+13x-50$

$4x-2x^2-32+16x=-3x^2+13x-50$.

$4x-2x^2-32+16x+3x^2-13x+50=0$

$x^2+7x+18=0$ de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec : $\begin{cases} a=1 \\ b=7 \\ c=18 \end{cases}$

$\Delta=b^2-4ac=7^2-4\times1\times18=49-72=-23$.

Or $-23<0$, donc $\Delta<0$ et par suite, $\boxed{S=\emptyset}$.

2) $2x^2+3x+c=0$ est une équation du second degré. ($a=2$; $b=3$ et c inconnu).

Elle admet au plus une solution réelle si et seulement si $\Delta\leqslant0$.

Or $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times2\times c=9-8c$.

$\Delta\leqslant0 \iff 9-8c\leqslant0 \iff 9\leqslant8c \iff \frac{9}{8}\leqslant c$: $\boxed{S=[\frac{9}{8};+\infty[}$

3) a) (E) $ax^2+bx-a=0$

Ici, $\Delta=b^2-4\times a\times(-a)$

$\boxed{\Delta=b^2+4a^2}$

Or $a\neq0$, donc $a^2>0$ et $4>0$, donc $4a^2>0$. de plus, $b^2\geqslant0$, donc $b^2+4a^2>0$

donc $\Delta>0$ et par suite (E) admet deux racines distinctes.

b) Soit x_1 et x_2 les deux racines de (E).

On sait que $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ avec ici $c=-a$.

Donc $x_1\times x_2=-\frac{a}{a}=-1$: Or $-1<0$, donc $x_1x_2<0$ et par suite (règle des signes d'un produit), x_1 et x_2 sont de signe contraire.

Exercice V

a) $f(x) = 2x^2 + 12x + 1 = 2(x^2 + 6x + \frac{1}{2})$

$f(x) = 2(x^2 + 2 \times x \times 3 + \frac{1}{2})$

$f(x) = 2(\underbrace{x^2 + 2\times x \times 3 + 3^2} - 3^2 + \frac{1}{2})$

$f(x) = 2((x+3)^2 - 9 + \frac{1}{2}) = 2((x+3)^2 - \frac{17}{2})$ $\quad -9 + \frac{1}{2} = -\frac{18}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{17}{2}$

$\boxed{f(x) = 2(x+3)^2 - 17}$ (Forme canonique).

b) On sait que pour tout réel x, $(x+3)^2 \geq 0$, donc $2(x+3)^2 \geq 2 \times 0$ car $2 > 0$ donc $2(x+3)^2 \geq 0$ et par suite : $\underbrace{2(x+3)^2 - 17} \geq 0 - 17$

Donc $\boxed{f(x) \geq -17}$

Exercice VI

$x_1 = 1$ est racine évidente de : $21x^2 + 5x = 26$ car $21 \times 1^2 + 5 \times 1 = 21 + 5 = 26$.

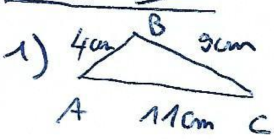
D'après le cours, en appelant x_2 la seconde racine de l'équation : $\underbrace{21x^2 + 5x - 26 = 0}$

On a : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ $\quad$ Ici $\begin{cases} a = 21 \\ b = 5 \\ c = -26 \end{cases}$

Donc $1 \times x_2 = \frac{-26}{21}$

$\boxed{S = \{-\frac{26}{21} ; 1\}}$.

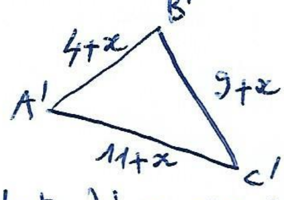
Exercice VII

1) 

$AC^2 = 11^2 = 121$ et $AB^2 + BC^2 = 4^2 + 9^2 = 16 + 81 = 97$.

Ainsi $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ car $121 \neq 97$, donc ABC n'est pas un triangle rectangle.

2) Soit x un réel positif.

Le "triangle augmenté" est : 

A'B'C' est rectangle en B' équivaut, d'après le théorème de Pythagore, à dire que :

$A'C'^2 = B'A'^2 + B'C'^2$

$(x+11)^2 = (x+4)^2 + (x+9)^2$

$\cancel{x^2} + 22x + 11^2 = \cancel{x^2} + 8x + 16 + x^2 + 18x + 81$

$22x + 121 = x^2 + 26x + 97$

$x^2 + 26x + 97 - 22x - 121 = 0$

$x^2 + 4x - 24 = 0$ de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -24 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-24)$

$\Delta = 16 + 96 = 112$

$\Delta > 0$, donc il y a deux solutions à cette équation : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-\sqrt{112}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+\sqrt{112}}{2} \end{cases}$

$112 = 7 \times 16$, donc $\sqrt{112} = 4\sqrt{7}$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4-4\sqrt{7}}{2} = -\dfrac{4}{2} - \dfrac{4\sqrt{7}}{2} = -2-2\sqrt{7} \\ x_2 = -2+2\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2-2\sqrt{7} \,;\, -2+2\sqrt{7}\}}$$

Or ici, $x \geq 0$ (augmentation de longueur), donc comme $-2-2\sqrt{7} < 0$ et $-2+2\sqrt{7} > 0$, Matt doit augmenter la longueur de chacun des côtés du triangle ABC de $-2+2\sqrt{7} = 2(-1+\sqrt{7})$ cm pour obtenir un triangle rectangle à l'arrivée.

Exercice VIII

Soit x le nombre de personnes initialement prévu (x entier naturel). ↳ strictement supérieur à 6 !

Au départ, chacune de ces personnes aurait dû toucher : $\frac{380}{x}$ €.

Six ne participent pas au partage, donc les 380 € seront à partager entre $x-6$ personnes, et chacune aura donc : $\frac{380}{x-6}$ €.

D'après l'énoncé : $\boxed{\frac{380}{x-6} = \frac{380}{x} + 4,8}$

$$\frac{380}{x-6} = \frac{380}{x} + \frac{4,8x}{x}$$

$$\frac{380}{x-6} = \frac{380+4,8x}{x} \iff 380x = (x-6)(4,8x+380) \text{ car } x \neq 6.$$

$$\frac{380}{x-6} = \frac{380+4,8x}{x} \iff \cancel{380x} = 4,8x^2 + \cancel{380x} - 6\times 4,8x - 6\times 380$$

$$\iff \underbrace{4,8x^2 - 28,8x - 2280}_{\text{de la forme : } ax^2+bx+c=0} = 0$$

avec : $a = 4,8$; $b = -28,8$; $c = -2280$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-28,8)^2 - 4\times 4,8\times(-2280)$$

$$\Delta = 44605,44 = 211,2^2.$$

$\Delta > 0$, donc deux solutions :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{28,8-211,2}{9,6} = -19 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{28,8+211,2}{9,6} = 25. \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{-19 ; 25\}}.$$

Or ici $x > 6$, donc il y avait initialement 25 personnes pour ce partage.