Seconde **Corrigé du DS12** **Mai 2022**

Exercice I

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 8x+2y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x+3 \\ 8x+2(-2x+3)=5 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x+3 \\ 8x-4x+6=5 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x+3 \\ 4x+6=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{5-6}{4}=-\frac{1}{4}=-0{,}25 \\ y=-2\times(-0{,}25)+3=0{,}5+3=3{,}5 \end{cases}$$

$\mathcal{S}=\{(-0{,}25\,;\,3{,}5)\}$ ou encore $\mathcal{S}=\left\{\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{7}{2}\right)\right\}$.

Exercice II

Soit x le nombre de bouteilles de lait et y celui de fromages vendus :

On a : $\begin{cases} 2{,}10\times x+5{,}50\times y=223 \\ x+y=56 \end{cases}$ $\begin{cases} y=56-x \\ 2{,}1x+5{,}5(56-x)=223 \end{cases}$ $\begin{cases} y=56-x \\ 2{,}1x+308-5{,}5x=223 \end{cases}$

$\begin{cases} 5{,}5x-2{,}1x=308-223 \\ y=56-x \end{cases}$ $\begin{cases} 3{,}4x=85 \\ y=56-x \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{85}{3{,}4}=25 \\ y=56-25=31 \end{cases}$

$\mathcal{S}=\{(25\,;\,31)\}$: Karie avait amené 25 bouteilles de lait et 31 fromages.

Exercice III

a)

Δ a pour équation cartésienne : $2x+5y+1=0$

donc $5y=-2x-1$

$y=\frac{-2x-1}{5}$

$\boxed{y=-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}}$

b) $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur $m=2$ et Δ a pour coefficient directeur $m'=-\frac{2}{5}$.

Or $2\neq-\frac{2}{5}$, donc $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes.

c) Soit $K(x\,;\,y)$ le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ : les coordonnées de K vérifient les équations des droites $\mathcal{D}$ et Δ, donc :

$\begin{cases} y=2x+3 \\ y=-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x+3 \\ 2x+3=-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x+3 \\ 2x+\frac{2}{5}x=-\frac{1}{5}-3 \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x+3 \\ \frac{10x}{5}+\frac{2x}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{15}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x+3 \\ \frac{12x}{5}=-\frac{16}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{16}{12}=-\frac{4}{3} \\ y=2\times\left(-\frac{4}{3}\right)+3=-\frac{8}{3}+3=-\frac{8}{3}+\frac{9}{3}=\frac{1}{3}. \end{cases}$

$\mathcal{S}=\left\{\left(-\frac{4}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)\right\}$ et $K\left(-\frac{4}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

Exercice IV

1) $A = 2^{2022} + 5$ est impair car $2^{2022} = 2 \times 2 \times \cdots \times 2$ est pair en tant que produit de facteurs pairs

5 est impair, et la somme d'un terme pair et d'un terme impair est impaire.

2) Soit n un entier. $n+1$ est le successeur de n.

$S = n + n + 1 = 2n+1$ est donc impaire : la somme de deux entiers consécutifs est toujours impaire.

3) n est pair, donc il existe un entier p tel que : $n = 2p$.

Donc $n^2(n+4) = (2p)^2(2p+4) = 4p^2(2p+4) = 4p^2 \times 2(p+2) = 8p^2(p+2)$.

Or p est entier, donc p^2 et $p+2$ sont entiers, et $p^2(p+2)$ est entier (produit d'entiers).

Donc $n^2(n+4)$ est bien un multiple de 8.

Exercice V

1) $A(3;8) \in \mathcal{D}$ équivaut à : $mx_A + (m-2)y_A + 1 = 0$

$$3m + 8(m-2) + 1 = 0$$
$$3m + 8m - 16 + 1 = 0$$
$$11m = 16 - 1 = 15$$
$$m = \frac{15}{11}$$
$$S = \left\{\frac{15}{11}\right\}.$$

Lorsque $m = \frac{15}{11}$, $\mathcal{D}$ passe par $A(3;8)$.

2) $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne : $mx + (m-2)y + 1 = 0$

donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -(m-2) \\ m \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\vec{u}\begin{pmatrix} -m+2 \\ m \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$.

Δ a pour équation réduite, $y = x$, donc pour équation cartésienne $x - y = 0$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix} -(-1) = 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige Δ

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -m+2 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = -m+2-m = 2$.

Or $2 \neq 0$, donc $\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, donc pour tout réel m, $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes.

3) Soit $M(x_M;y_M)$: M appartient à l'axe des abscisses où $y_M = 0$.

donc $M(x_M;0)$. De plus, $M(x_M;0) \in \mathcal{D}$ donc : $mx_M + (m-2) \times 0 + 1 = 0$.

$$mx_M = -1$$
$$x_M = -\frac{1}{m} \quad \text{car } m \neq 0.$$

Donc $M\left(-\frac{1}{m};0\right)$ est l'unique point de $\mathcal{D}$ appartenant à l'axe des abscisses.

Exercice 6 ***(4 points)***

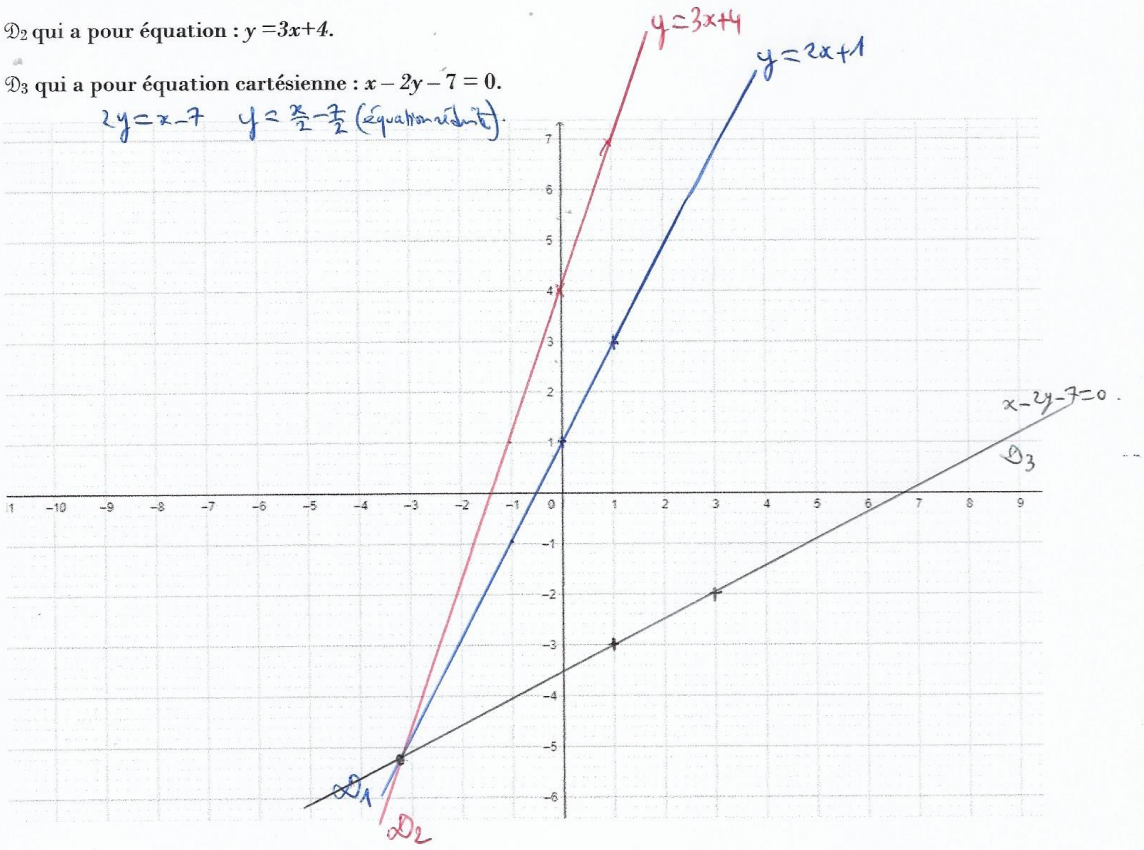
1) Tracer dans le repère ci-dessous, sans justifier, les trois droites :

$\mathcal{D}_1$ qui a pour équation : $y = 2x+1$.

$\mathcal{D}_2$ qui a pour équation : $y = 3x+4$.

$\mathcal{D}_3$ qui a pour équation cartésienne : $x - 2y - 7 = 0$.

$2y = x - 7$ $\quad y = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$ (équation réduite).



2) Quelle constat faites-vous concernant ces trois droites ? Elles semblent être concourantes.

3a) Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent en le point A(-3 ; -5).

3b) Démontrer que A appartient également à la droite $\mathcal{D}_3$.

3a) Le plus simple est encore ici de vérifier que $A(-3;-5) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$: $2x_A+1 = 2\times(-3)+1 = -6+1 = -5 = y_A$ donc $A \in \mathcal{D}_1$. De même, $3x_A+4 = 3\times(-3)+4 = -9+4 = -5 = y_A$, donc $A \in \mathcal{D}_2$.

Par suite, $A \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ et comme $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont non parallèles (car $2 \neq 3$ coeff. directeurs différents) elles se coupent donc en $A(-3;-5)$.

3b) Là encore, on calcule : $x_A - 2y_A - 7 = -3 - 2\times(-5) - 7 = -3+10-7 = 0$, donc $A \in \mathcal{D}_3$.

Donc $\boxed{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \text{ et } \mathcal{D}_3 \text{ concourent bien en } A(-3;-5)}$