Exercice I

1) a) $\underbrace{\ln(x+1)}_{\text{existe ssi } x+1>0\text{, car } \ln \text{ définie sur }]0;+\infty[} \leqslant 0 \iff \ln(x+1) \leqslant \ln(1) \iff \begin{cases} x+1 \leqslant 1 \\ \text{et} \\ x+1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant 0 \\ \text{et} \\ x>-1 \end{cases}$. $\boxed{S =]-1;0]}$.

b) $4e^{3x-1} = 1 \iff e^{3x-1} = \frac{1}{4} \iff \ln(e^{3x-1}) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \iff 3x-1 = -\ln 4 \iff x = \frac{1-\ln 4}{3}$. $\boxed{S = \left\{\frac{1-\ln 4}{3}\right\}}$

c) $\dfrac{1}{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+1} \geqslant 0{,}999 \iff \dfrac{1}{0{,}999} \geqslant 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+1$ car $2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+1>0$.

$\iff 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{0{,}999}-1$

$\iff \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0{,}999}-1\right)$ et $\frac{1}{0{,}999}-1 = \frac{1-0{,}999}{0{,}999} = \frac{0{,}001}{0{,}999} = \frac{1}{999}$.

$\iff \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{999}$

$\iff \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{1998}$

$\iff \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{1998}\right)$ car $\underline{\ln \text{ croît sur }]0;+\infty[}$

$\iff n\ln\left(\frac{1}{4}\right) \leqslant -\ln(1998)$

$\iff -n\ln(4) \leqslant -\ln(1998)$

$\iff n \geqslant \dfrac{-\ln(1998)}{-\ln(4)}$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln(1998)}{\ln(4)}$. Or, $\dfrac{\ln(1998)}{\ln(4)} \simeq 5{,}48$.

c) $e^{2x}+e^{x}-12=0 \iff (e^{x})^{2}+e^{x}-12=0$

Posons $y=e^{x}$: l'équation proposée devient : $\underbrace{y^{2}+y-12=0}_{\text{équation du 2nd degré en la variable } y}$.

$a=1$; $b=1$; $c=-12$. $\Delta=1^{2}-4\times1\times(-12)=49=7^{2}$.

Deux racines réelles car $\Delta>0$: $\begin{cases} y_1=\frac{-1-7}{2}=-4 \\ y_2=\frac{-1+7}{2}=3 \end{cases}$

<u>Retour à la variable x :</u> $y=e^{x}$ et $y\in\{-4;3\}$ donc on résout :

$e^{x}=-4 \rightarrow$ Pas de solution réelle car $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x}>0$.

$e^{x}=3 \iff \ln(e^{x})=\ln(3) \iff x=\ln(3)$

$\mathcal{S}=\{\ln(3)\}$.

α) $1-0{,}84^{n}>0{,}95 \iff 1-0{,}95>0{,}84^{n} \iff 0{,}84^{n}<0{,}05 \iff \ln(0{,}84^{n})<\ln(0{,}05)$ (croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff n\ln(0{,}84)<\ln(0{,}05)$

$\iff n>\frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}84)}$ car $\ln(0{,}84)<0$ vu que $\forall x\in]0;1[,\ \ln(x)<0$

Or $\frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}84)}\approx17{,}18$, donc $\underline{n_0=18}$

β) $0{,}34^{n}<10^{-6} \iff \ln(0{,}34^{n})<\ln(10^{-6}) \iff n\ln(0{,}34)<-6\ln(10)$

$\iff n>\frac{-6\ln(10)}{\ln(0{,}34)}$ avec $\frac{-6\ln(10)}{\ln(0{,}34)}\approx12{,}81$

$\iff n\geqslant13$

Donc ici $\underline{n_0=13}$.

2) $g(t)=10^{6}\times e^{0{,}25t}$

a) $g(0)=10^{6}\times e^{0{,}25\times0}=10^{6}$: Population initiale.

b) On cherche $t\in[0;+\infty[$ tel que $g(t)=2g(0)=2\times10^{6}$.

$g(t)=2\times10^{6} \iff 10^{6}\times e^{0{,}25t}=2\times10^{6} \iff e^{0{,}25t}=2 \iff \ln(e^{0{,}25t})=\ln(2)$

$g(t)=2\times10^{6} \iff 0{,}25t=\ln(2) \iff t=\frac{\ln(2)}{0{,}25}=\frac{\ln(2)}{\frac{1}{4}}=\underline{4\ln(2)}$. $S=\{4\ln(2)\}$

$t\simeq2{,}77$ h.

Pour que $g(t)=10\,g(0)$, on résout : $10^{6}\times e^{0{,}25t}=10\times10^{6} \iff e^{0{,}25t}=10 \iff \ln(e^{0{,}25t})=\ln(10)$

$\iff 0{,}25t=\ln(10) \iff t=\frac{\ln(10)}{0{,}25}$.

$S=\{4\ln(10)\}$. $t=4\ln(10)$ $t\simeq9{,}21$ h.

Exercice II

1. f_a est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a'(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2$
   $f_a'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{x-a} - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^{x-a} > 2 \iff x - a > \ln 2 \iff x > a + \ln 2$
   $f_a'(x)$ s'annule et change de signe pour $x = a + \ln 2$ en étant négatif puis positif donc f_a admet un minimum en $a + \ln 2$ égal à
   $f_a(a+\ln 2) = \mathrm{e}^{a+\ln 2 - a} - 2(a + \ln 2) + \mathrm{e}^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^a$.

x	$-\infty$		$a+\ln 2$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
f_a		$\searrow$	$f_a(a+\ln 2)$	$\nearrow$	

2. En $a + \ln 2$, on a $f_a(a+\ln 2) = 2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^a$.
   Afin de minimiser ce minimum, on étudie les variations de la fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $\varphi(a) = 2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^a$.
   $\varphi'(a) = -2 + \mathrm{e}^a$;
   - $-2 + \mathrm{e}^a > 0 \iff \mathrm{e}^a > 2 \iff a > \ln 2$;
   - $-2 + \mathrm{e}^a < 0 \iff \mathrm{e}^a < 2 \iff a < \ln 2$;

   $\varphi'(a)$ s'annule et passe de négatif à positif en $a = \ln 2$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	$4 - 4\ln 2$	$\nearrow$	

Prendre $a = \ln 2$, minimise donc le minimum de f_a qui est égal à
$\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + \mathrm{e}^{\ln 2} = 4 - 4\ln 2$.

Exercice III

42 **a)** $\theta(t) = 12{,}5$ équivaut à $25 - 10\mathrm{e}^{0{,}1t} = 12{,}5$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^{0{,}1t} = 1{,}25$ soit $0{,}1t = \ln(1{,}25)$.

Donc $t = \dfrac{\ln(1{,}25)}{0{,}1}$ et $t \approx 2{,}2$.

La température atteindra 12,5 °C au bout d'environ 2,2 minutes.

b) $\theta(t) = 0$ équivaut à $25 - 10\mathrm{e}^{0{,}1t} = 0$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^{0{,}1t} = 2{,}5$ soit $0{,}1t = \ln(2{,}5)$.

Donc $t = \dfrac{\ln(2{,}5)}{0{,}1}$ et $t \approx 9{,}2$.

La température atteindra 0°C au bout d'environ 9,2 minutes.

52 **a)** Les abscisses de chacun des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses vérifient l'équation $f(x) = 0$ c'est-à-dire $(\ln(x) - 1)(3 - \ln(x)) = 0$ soit $x = \mathrm{e}$ ou $x = \mathrm{e}^3$.

Les abscisses de chacun des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont e et e^3.

b) On peut dresser ce tableau de signes.

x	0		e		e^3		$+\infty$
$\ln(x) - 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$3 - \ln(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

f est négative sur $]0\,;\mathrm{e}] \cup]\mathrm{e}^3\,;+\infty[$.

f est positive sur $]\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^3[$.

64*b*)

b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2x - 3 > 0$, $x + 1 > 0$ et $x - 3 > 0$ c'est-à-dire $x > \dfrac{3}{2}$, $x > -1$ et $x > 3$ donc $\mathrm{E} =]3\,;+\infty[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(2x - 3) - 2\ln(x + 1) = \ln(x - 3)$ s'écrit aussi $\ln(2x - 3) = \ln((x + 1)^2) + \ln(x - 3)$ soit $\ln(2x - 3) = \ln((x + 1)^2(x - 3))$.

Ce qui équivaut à $2x - 3 = (x + 1)^2(x - 3)$ soit $2x - 3 = (x^2 + 2x + 1)(x - 3)$ c'est-à-dire $x^3 - x^2 - 7x = 0$.

$x^3 - x^2 - 7x = 0$ équivaut à $x(x^2 - x - 7) = 0$ soit $x = 0$, $x = \dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}$ ou $x = \dfrac{1 - \sqrt{29}}{2}$.

Seul $\dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}$ appartient à E.

Donc $\mathrm{S} = \left\{\dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}\right\}$.

Exercice IV

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \dfrac{3}{x}$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$f(x) = x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \frac{3}{x}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \implies \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) + 4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0 \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

$$f'(x) = 1 + 0 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^2-4x+3}{x^2}$$

3. **a.** On cherche le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$:
$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

x	0		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		+	0	−	0	−	
x^2	0	+		+		+	
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	

$f(1) = 1 + 4 - 4\ln(1) - \dfrac{3}{1} = 2$; $f(3) = 3 + 4 - 4\ln(3) - \dfrac{3}{3} = 6 - 4\ln(3) \approx 1,69$
On établit le tableau des variations de f en admettant que que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	$6-4\ln(3)\approx 1,61$	↗	$+\infty$

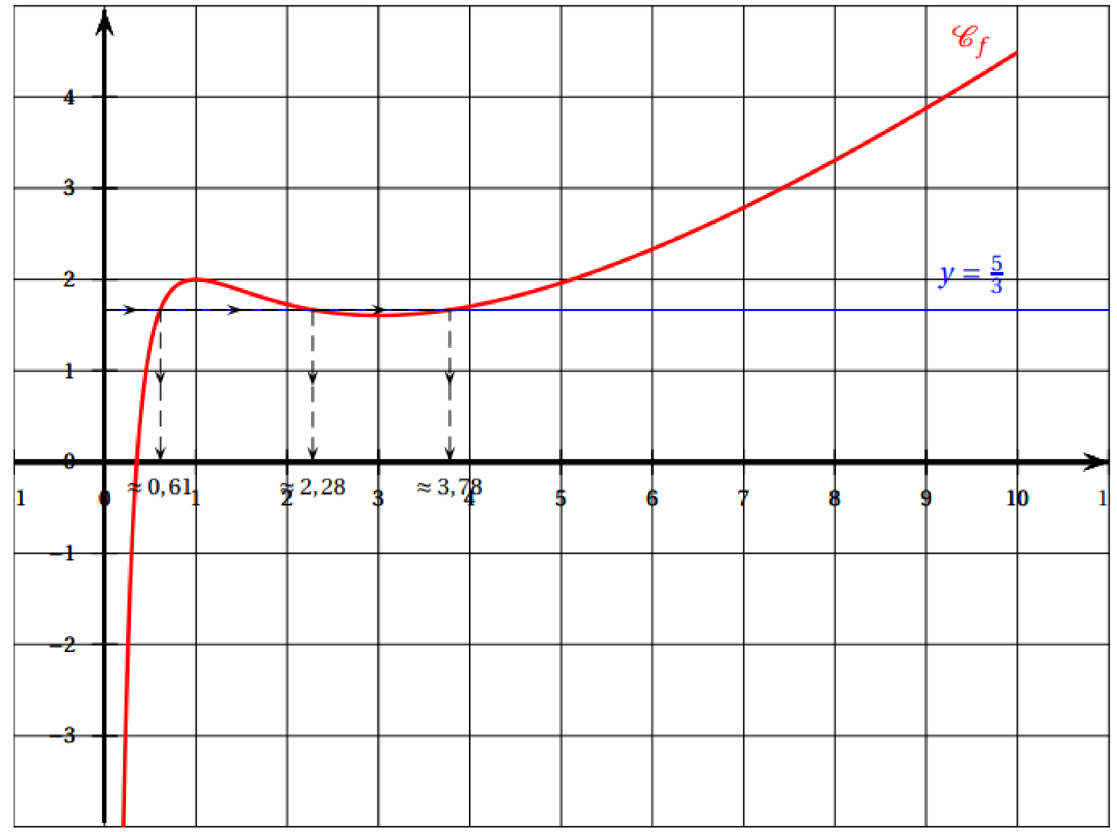
b. • $\dfrac{5}{3} \in]-\infty\,;\,2]$ donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

• $\dfrac{5}{3} \approx 1,67$ et $f(3) = 6 - 4\ln 3 \approx 1,61$ donc $\dfrac{5}{3} \in [6-4\ln 3\,;\,2]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;\,3[$.

• $\dfrac{5}{3} \in [6-4\ln 3\,;\,+\infty[$, donc $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet donc trois solutions dans $]0\,;\,+\infty[$.

Voir cidessus les valeurs approchées des solutions.



4. Pour étudier la convexité de f, on détermine le signe de f'', la dérivée seconde de f.

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ donc

$$f''(x) = \frac{(2x-4) \times x^2 - (x^2 - 4x + 3) \times 2x}{x^4} = \frac{(2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 6) \times x}{x^4} = \frac{4x-6}{x^3}$$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$		$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
	‖	f concave		f convexe	

La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{3}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$.

Exercice V

Partie A $x \in [0, +\infty[$ et $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

① $f(x) = 5\ln(u(x)) - x$ avec : $u(x) = x+3$ et $u'(x) = 1$

ⓐ $f'(x) = 5 \times \frac{u'(x)}{u(x)} - 1 = 5 \times \frac{1}{x+3} - 1 = \frac{5}{x+3} - 1 = \frac{5}{x+3} - \frac{(x+3)}{x+3} = \frac{5-(x+3)}{x+3} = \frac{5-x-3}{x+3} = \frac{-x+2}{x+3}$.

Or $x \geq 0$, donc $x+3 \geq 3 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que : $-x+2$.

Par suite, $f'(x) \geq 0 \iff -x+2 \geq 0 \iff 2 \geq x$.

soit d'après le théorème de Lagrange :

ⓑ

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$5\ln(3)$	$\nearrow$	$5\ln(5)-2$	$\searrow$	$-\infty$

$\to$ cf. q. ⓓ!

$f(2) = 5\ln(5) - 2$

ⓒ $f(x) = 5\ln(x+3) - x \overset{\text{pour } x>0}{=} x\left(\frac{5\ln(x+3)}{x} - 1\right)$

$f(x) = x\left(\frac{5\ln(x(1+\frac{3}{x}))}{x} - 1\right) = x\left(\frac{5\ln(x) + 5\ln(1+\frac{3}{x})}{x} - 1\right)$.

$f(x) = x\left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1\right) + \frac{x \times 5\ln(1+\frac{3}{x})}{x}$

Pour $x>0$

$$\boxed{f(x) = x\left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

ⓓ On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (limite de référence), donc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5\ln(x)}{x} - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$, donc par limite de produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1\right) = -\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{X\to1} \ln(X) = 0$, donc par limite de composée et de produit :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 0$.

Par suite, par limite de somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ voir c).

②a) $5\ln(3) \simeq 5{,}49$, donc $5\ln(3) > 0$

f croît sur $[0;2]$, et $f(0) > 0$, donc $f(x) > 0$ sur $[0;2]$, donc sur cet intervalle, l'équation

$f(x)=0$ n'a pas de solution sur $[0;2]$.

Sur $[2;+\infty[$: (*) f est continue car dérivable.
(**) f est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.
(***) $f(2)=5\ln(5)-2$ ($\simeq 6{,}047$) donc $f(2)>0$.
Par suite, $0\in]-\infty;5\ln(5)-2]$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α avec $\alpha\in[2;+\infty[$.

Par suite, $f(x)=0$ a pour unique solution α, avec $\alpha\in[0;+\infty[$.

2b) $f(14)\simeq 0{,}166$, donc $f(14)>0$
$f(15)\simeq -0{,}548$, donc $f(15)<0$ / Par suite, $14\leq\alpha\leq 15$.

Grâce à ma calculatrice et à la méthode du balayage on obtient :

Pas égal à 0,1 :

x	$f(x)$
14,2	0,0245
14,3	−0,046

Pas égal à 0,01

x	$f(x)$
14,23	0,0033
14,24	−0,004

Donc : $14{,}23<\alpha<14{,}24$ donc $\alpha\simeq 14{,}2$ à 10^{-1} près.

c)

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	

$f(\alpha)=0$ et f décroît sur $[\alpha;+\infty[$
donc $f(x)\leq 0$ si $x\in[\alpha;+\infty[$.

Partie B
1a) cf. annexe.
1b) Il semblerait que la suite (u_n) soit croissante.

2a) $g(x)=5\ln(x+3)$.
$g'(x)=\frac{5}{x+3}$ (cf. A.1) donc pour tout réel $x\geq 0$, $\frac{5}{x+3}>0$, donc $g'(x)>0$ sur $[0;+\infty[$.
D'après le th. de Lagrange, g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2b) On sait que $f(\alpha)=0$ donc que : $5\ln(\alpha+3)-\alpha=0$ donc que $5\ln(\alpha+3)=\alpha$, donc que $g(\alpha)=\alpha$.

2c) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq \alpha$.

Initialisation : Pour $n=0$: $u_0 = 4$ et $0 \leq 4 \leq \alpha$ est vraie, car $14 < \alpha < 15$!
donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel (fixé) tel que : $\mathcal{P}(n)$ est vraie i.e $0 \leq u_n \leq \alpha$.
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : Or par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq \alpha$ et $u_{n+1} = g(u_n)$
donc comme g croît sur $[0;\alpha]$ on a : $g(0) \leq g(u_n) \leq g(\alpha)$.

donc : $5\ln(3) \leq u_{n+1} \leq \underbrace{g(\alpha)}_{= \alpha}$ par B.2b.

Or $5\ln(3) \geq 0$, donc on a bien : $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
donc d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \alpha}$

2d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} - u_n} = g(u_n) - u_n = \boxed{f(u_n)}$ car $g(x) = f(x) - x$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$ (par 2b), et f ~~est~~ à valeurs positives sur $[0;\alpha]$ d'après A-2-c.
donc $f(u_n) \geq 0$ et par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$: donc (u_n) croît et la conjecture du B1b) est ainsi validée.

2e) (u_n) croît et est majorée par α d'après B-2-c), donc (u_n) converge.
Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$: un passage à la limite ds : $u_{n+1} = g(u_n)$ conduit à : $\ell = g(\ell)$

$\iff g(\ell) - \ell = 0$

$\iff f(\ell) = 0$.

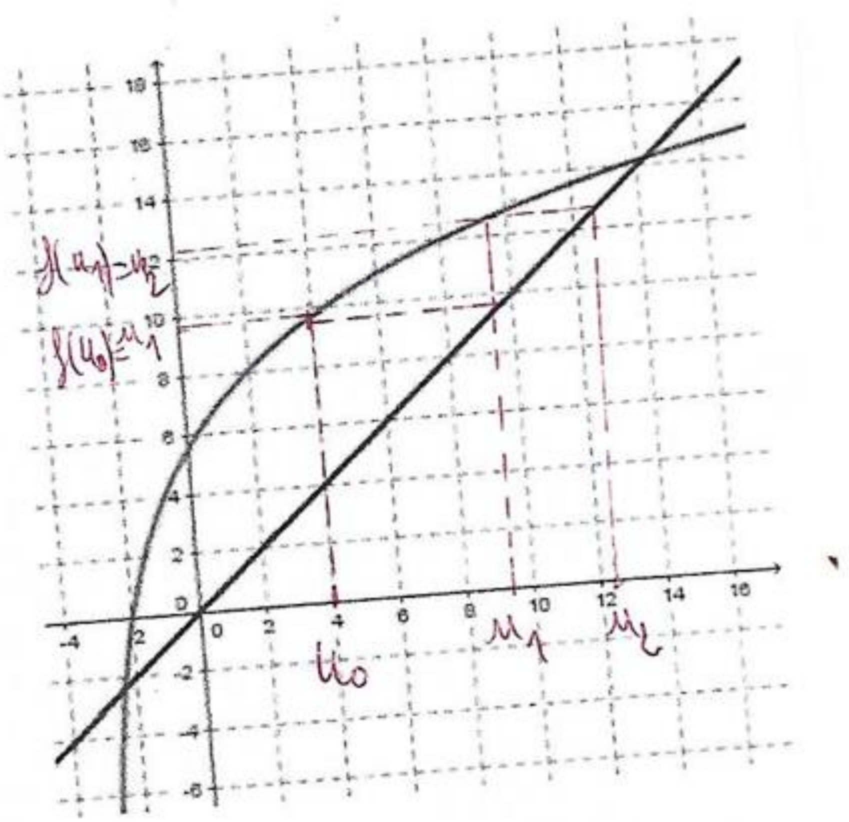
Grâce à A-2a), on en déduit que $\ell = \alpha$ car $f(x) = 0$ a pour unique solution α sur $[0;+\infty[$.

3) 0) Cet algorithme permet de déterminer, (s'il existe) le plus petit réel u tel que $g(u) \geq 14,2$.

a) Cet algo. est associé à la suite (u_n). Or (u_n) converge en croissant vers α avec $14,23 < \alpha < 14,24$;
donc il existe un rang N à partir duquel : $n \geq N \Rightarrow u_n \geq 14,2$, donc l'algo. se termine à coup sûr.
(Le fait que (u_n) croisse assure l'existence d'un plus petit entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 14,2$ si $N \leq n$.

b) Grâce à une calculatrice : on trouve en sortie : $\boxed{u \simeq 14,22315}$

Annexe 1



Exercice facultatif

1. **a.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right]$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0}\left(5x^2+2x\right)=0 \\ \text{Par croissance comparée } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln(x)=0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right]=0$$

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0}$$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[5+\frac{2}{x}-2\ln(x)\right]$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}=0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\frac{2}{x}\right)=5 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln(x)=-\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[5+\frac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[5+\frac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[5+\frac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty$$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$$

2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\times 2x+2-2\left[2x\times\ln(x)+x^2\times\frac{1}{x}\right] = 10x+2-2\left[2x\ln(x)+x\right] = 10x+2-4x\ln(x)-2x \\ &= \boxed{8x+2-4x\ln(x)} \end{aligned}$$

3. **a.**

$$f''(x) = 8-4\left[1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right] = 8-4\ln(x)-4 = 4-4\ln(x) = \boxed{4\left[1-\ln(x)\right]}$$

b. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes si, et seulement si, f est convexe, ce qui équivaut à $f''(x)$ est positif.

$f''(x) \geqslant 0 \iff 4\left[1-\ln(x)\right] \geqslant 0 \iff 1-\ln(x) \geqslant 0 \iff -\ln(x) \geqslant -1 \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant \mathrm{e}$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$).

La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}]$.

c.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f'	‖ 2	↗	$4\mathrm{e}+2$	↘	$-\infty$

$f'(\mathrm{e}) = 8\mathrm{e}+2-4\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) = 8\mathrm{e}+2-4\mathrm{e} = 4\mathrm{e}+2$

4. **a.** Sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$, la fonction f' est strictement croissante avec $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$, donc pour tout $x \in\,]0\,;\,\mathrm{e}]$,on a $f'(x) > 0$.

Sur $[\mathrm{e}\,;\, +_i nfty[$, la fonction f' est continue (puisque dérivable) et strictement décroissante. De plus, $f(_t exte) = 4\mathrm{e}+2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$. $0 \in\,]-\infty\,;\,4\mathrm{e}+2[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

Au final, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0\,;\,+\infty[$.

On a :

$$\boxed{7{,}87 < \alpha < 7{,}88}$$

b. On sait que sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$ on a $f'(x) > 0$. Puisque f' est décroissante sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ et qu'elle s'annule en α, $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\mathrm{e}\,;\,\alpha]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$. Donc $f'(x)$ est positif sur $]0\,;\,\alpha]$ et négatif sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ 0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

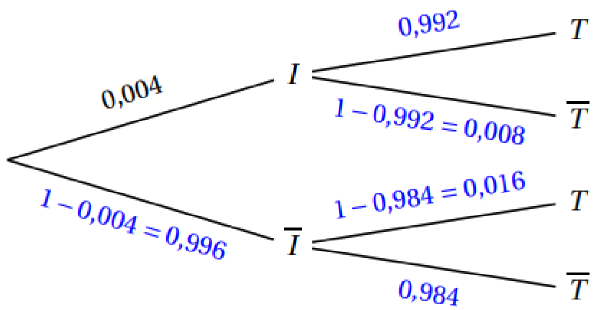
5. On a $f''(\alpha) = 8\alpha + 2 - 4\alpha\ln(\alpha)$, donc :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) = 0 &\iff 8\alpha + 2 - 4\alpha\ln(\alpha) = 0 \\ &\iff 4\alpha\ln(\alpha) = 8\alpha + 2 \\ &\iff \ln(\alpha) = \frac{2(4\alpha+1)}{4\alpha} \qquad (\alpha \neq 0) \\ &\iff \boxed{\ln(\alpha) = \frac{4\alpha+1}{2\alpha}} \end{aligned}$$

Exercice de probabilités

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. **a.** La probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif est : $P\left(\overline{I} \cap \overline{T}\right) = 0,996 \times 0,984 \approx 0,980$.

   b. La probabilité que la vache présente un test positif est $P(T)$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(T) = P(I \cap T) + P\left(\overline{I} \cap T\right) = 0,004 \times 0,992 + 0,996 \times 0,016 = 0,019\,904$ soit $0,020$ à 10^{-3} près,

   c. La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif, c'est-à-dire : $P_T(I)$.
   $P_T(I) = \dfrac{P(I \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,004 \times 0,992}{0,02} \approx 0,199$

   d. Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de $P\left(\overline{I} \cap T\right)$, ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de $P\left(I \cap \overline{T}\right)$.

La probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache est donc : $P\left(\overline{I} \cap T\right) + P\left(I \cap \overline{T}\right) = 0{,}996 \times 0{,}016 + 0{,}004 \times 0{,}008 \approx 0{,}160$.

Partie B

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

a. L'expérience élémentaire consiste à savoir si, pour une vache donnée, le test est positif (avec une probabilité $p = 0{,}02$) ou non ; il n'y a donc que deux issues.

On exécute cette expérience élémentaire 100 fois pour extraire un échantillon de taille $n = 100$ en assimilant ce choix à un tirage avec remise.

La variable aléatoire X qui donne le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$.

b. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif est : $P(X=3) = \binom{100}{3} \times 0{,}02^3 \times (1-0{,}02)^{100-3} \approx 0{,}182$.

c. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif est : $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}859$ (résultat donné par la calculatrice).

4. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

La valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99 est telle que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$.

C'est-à-dire : $1 - P(X=0) \geqslant 0{,}99$ ou encore : $0{,}01 \geqslant P(X=0)$.

On résout l'inéquation : $P(X=0) \leqslant 0{,}01$.

$P(X=0) = \binom{n}{0} \times 0{,}02^0 \times (1-0{,}02)^{n-0} = 0{,}98^n$

$0{,}98^n \leqslant 0{,}01 \iff \ln\left(0{,}98^n\right) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \times \ln(0{,}98) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)}$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)} \approx 227{,}95$ donc il faut un échantillon d'au moins 228 vaches pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.