Seconde **Corrigé du DM8** **Décembre 2023**

Exercice I

$f(x) = \frac{x-9}{2x+4}$

1) f(x) est calculable si 2x +4 $\neq$0.

Or 2x +4 = 0 équivaut à 2x = -4 c'est-à-dire à x = -2.

Ainsi, -2 est la valeur interdite pour f, de sorte que $D_f = \mathbb{R}$-{-2}=]-∞ ;-2[$\cup] - 2; +\infty[$.

2) $f(0)=\frac{-9}{4}$ et $f(1)= \frac{1-9}{2+4}=\frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$.

3) Résolvons $f(x) = 3$ c'est-à-dire : $\frac{x-9}{2x+4} = 3$, ce qui par produits en croix conduit à : $x-9 = 3(2x+4)$ et $x\neq-2$, donc $x - 9 = 6x + 12$ et $x\neq-2$, donc $5x = -21$ et $x = \frac{-21}{5}$: l'antécédent de 3 par f est donc égal à $\frac{-21}{5}$.

4) $f(2) = \frac{-7}{8}$, or $\frac{-7}{8}$ est différent de l'ordonnée du point A (égale à -1), donc A(2 ; -1) n'appartient pas à la courbe de f.

De même $f(-1) = \frac{-10}{2}$=-5 qui est différent de l'ordonnée 5 du point B, donc B(-1 ; 5) n'appartient pas à la courbe représentant f.

Question facultative

$\frac{x-9}{2x+4} \geqslant -5$ équivaut à : $\frac{x-9}{2x+4} + 5 \geqslant 0$

$\frac{x-9}{2x+4} + \frac{5}{1} \geqslant 0$

$\frac{x-9}{2x+4} + \frac{5(2x+4)}{2x+4} \geqslant 0$

$\frac{x-9+5(2x+4)}{2x+4} \geqslant 0 \iff \frac{x-9+10x+8}{2x+4} \geqslant 0 \iff \frac{11x-1}{2x+4} \geqslant 0.$

OR : $11x-1 \geq 0 \iff 11x \geq 1 \iff x \geq \frac{1}{11}$ et $2x+4 \geq 0 \iff 2x \geq -4 \iff x \geq -\frac{4}{2} \iff x \geq -2$

d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{11}$		$+\infty$
Signe de $11x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{11x-1}{2x+4}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Conclusion : $\frac{11x-1}{2x+4} \geq 0$ équivaut à : $x < -2$ ou $x \geq \frac{1}{11}$: $\boxed{S =]-\infty\,;-2[\cup [\frac{1}{11}\,;+\infty[}$

Exercice II

a) $f(x) = \frac{x-9}{2x+1}$.

$f(x)$ est calculable si et seulement si $2x+1 \neq 0$.

Or, $2x+1=0$ équivaut à $x = -\frac{1}{2}$: $-\frac{1}{2}$ est donc la seule valeur interdite par f, donc

$\boxed{D_f =]-\infty\,;-\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}\,;+\infty[}$ (encore noté : $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$).

b) $g(x) = \sqrt{\frac{-4x+1}{x+1}}$ est calculable si et seulement si : $\frac{-4x+1}{x+1} \geq 0$ et $x+1 \neq 0$.

Faisons un tableau de signe de l'expression $\frac{-4x+1}{x+1}$:

$-4x+1 \geq 0$ équivaut à $1 \geq 4x$ c'est à dire $x \leq \frac{1}{4}$. Et $x+1 \geq 0$ équivaut à $x \geq -1$.

D'où :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $-4x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\sqrt{\frac{-4x+1}{x+1}}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

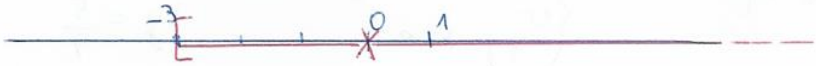
Donc $\frac{-4x+1}{x+1} \geq 0$ équivaut à : $-1 < x \leq \frac{1}{4}$.

Donc $\boxed{D_g =]-1\,;\frac{1}{4}]}$

c) $h(x) = \frac{5}{x} + \sqrt{x+3}$

$\frac{5}{x}$ est calculable si et seulement si $x \neq 0$

$\sqrt{x+3}$ est calculable si et seulement si $x+3 \geq 0$ c'est à dire : $x \geq -3$.



Donc $\boxed{D_h = [-3;0[\cup]0;+\infty[}$

Exercice III

1) $I = [-2;6]$

2) a) $f(4) = 3$

b) $g(-2) = 4$

c) Les antécédents de 0 par f sont : -1 ; $2,3$ et 6

d) Par exemple, 3.

e) $f(x) = 1 \iff x \approx -1,5$ ou $x \approx 3$ ou $x \approx 5,7$ $\qquad S = \{-1,5 ; 3 ; 5,7\}$.

f) $g(x) = 5$: $S = \emptyset$

g) $f(x) = g(x)$: $S = \{3\}$

h) $f(x) < g(x)$: $S = [-2;3[$

i) $g(x) \leq 1$: $S = [3;6]$

j) Si $x \in [-2;6]$, alors $f(x) \in [-1;3,3]$: $-1 \leq f(x) \leq 3,3$.

k) Si $m < -1$ ou si $m > 3,3$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution.
Si $m = -1$ ou si $m = 3,3$, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution.
Si $m \in]-1;0[\cup]2;3,3[$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions.
Si $m \in [0;2]$, l'équation $f(x) = m$ a trois solutions.

BONUS

I-A ne peut pas dire faux, car sinon aucun des deux ne serait un coquin, et les deux seraient des chevaliers et diraient vrai, en contradiction avec l'hypothèse formulée A ment.

Donc A est un chevalier, il dit donc vrai, donc au moins un des deux est un coquin, et comme A n'en est pas un, B est un coquin.

II-On résout d'abord f(X) = 0 qui conduit à : X = -4 ou X = -2 ou X = 2 ou X = 4.

On cherche ensuite les éventuels antécédents de ces quatre nombres -4 ; -2 ; 2 et 4 par f.

-4 n'a pas d'antécédents par f ; -2 a deux antécédents par f ; 2 a quatre antécédents par f et 4 a deux antécédents par f. Donc au total, l'équation : f(f(x)) = 0 admet : 0 + 2 + 4 +2 = 8 solutions.