Exercice I

1) On a : $E = (r + R)i$

$P = Ri^2$

On cherche P en fonction de R :

$E = (r+R)i \Leftrightarrow i = \dfrac{E}{r+R}$

$\Leftrightarrow i = \dfrac{10}{20+R}$

$P = Ri^2 \Leftrightarrow P = R \times \left(\dfrac{10}{20+R}\right)^2$

$\Leftrightarrow P = R \times \dfrac{100}{(20+R)^2}$

$\Leftrightarrow \boxed{P = \dfrac{100R}{(20+R)^2}}$

2) $f(x) = \dfrac{100x}{(20+x)^2} = \dfrac{100x}{x^2+40x+400} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x) = 100x$ et $u'(x) = 100$

$v(x) = x^2 + 40x + 400$ et $v'(x) = 2x + 40$

Donc, $f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$

$f'(x) = \dfrac{100 \times (x^2+40x+400) - (100x \times (2x+40))}{(20+x)^4}$

$f'(x) = \dfrac{100x^2 + 4000x + 40000 - 200x^2 - 4000x}{(20+x)^4}$

$f'(x) = \dfrac{-100x^2 + 40000}{(20+x)^4}$

Désormais, on étudie le signe de $f'(x)$ pour ensuite étudier le sens de variations de f :

$(20+x)^4 > 0$ sur l'intervalle $[0;50]$.

Donc le signe du numérateur déterminera le signe de $f'(x)$:

$-100x^2 + 40\,000$; un trinôme avec $a = -100$; $b = 0$; $c = 40000$

On cherche si ce trinôme admet des racines réelles :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 0^2 - 4 \times (-100) \times 40\,000$

$\Delta = 16\,000\,000 = 4000^2$

$\Delta > 0$, donc ce trinôme admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0-4000}{2\times(-100)} = 20$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0+4000}{2\times(-100)} = -20$$

$a < 0$, donc on a le tableau suivant :

x	0		20		50
signe de $f'(x)$		signe contraire de a $+$	0	Même signe que a $-$	
variations de f		↗	$\frac{5}{4}$	↘	

3) $f(20) = \dfrac{100 \times 20}{(20+20)^2} = \dfrac{5}{4}$

Cette puissance est maximale lorsque R est égale à 20 Ω. Cette puissance vaut alors 1,25 W.

Exercice II

1) $A = \cos(-x) + \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin(\pi - x)$

$A = \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) + \sin(x)$.

$\boxed{A = 0}$

$B = \sin(5\pi + x) + \cos(x - 3\pi)$

$B = \sin(\pi + x) + \cos(x + \pi)$

car $\cos(x - 3\pi) = \cos(x - 3\pi + 4\pi)$

4π est un multiple entier de 2π.

$\sin(5\pi + x) = \sin(5\pi + x - 4\pi)$

$\boxed{B = -\sin(x) - \cos(x)}$

2) $S = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$S = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$

$S = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$\boxed{S = 0}$

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) = \sin(x)$.

3) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

3b) $\sin(x) = \frac{1}{9}$ et $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

On a : $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \iff \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$.

$\iff \cos(x) = -\sqrt{\frac{80}{81}} = -\frac{\sqrt{80}}{9}$ ou $\cos(x) = \frac{\sqrt{80}}{9}$.

Or, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, donc $\cos(x) \leq 0$, donc $\cos(x) = -\frac{\sqrt{80}}{9} = \frac{-4\sqrt{5}}{9}$

3c) Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$, et donc :

$\cos(n\pi) = \cos(2k\pi) = \cos(0 + 2k\pi) = \cos(0) = 1$.

Si n est impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$ et donc :

$\cos(n\pi) = \cos((2k+1)\pi) = \cos(2k\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$.

En conclusion, $\cos(n\pi) = 1$ si n est pair, et $\cos(n\pi) = -1$ si n est impair.

En remarquant que $(-1)^n = 1$ si n est pair, et $(-1)^n = -1$ si n est impair, on peut donc dire que :

$\cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice III

1) a) $\sin(2x) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{2} = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}. \\ S_{]-\pi;\pi]} = \left\{\frac{\pi}{12} \,;\, -\frac{11\pi}{12} \,;\, \frac{5\pi}{12} \,;\, -\frac{7\pi}{12}\right\}. \end{array}}$$

1b) $\cos^2(x) + 2\cos(x) = 0 \iff \cos(x)\left(\cos(x) + 2\right) = 0 \iff \begin{cases} \cos(x) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \cos(x) + 2 = 0 \to \text{pas de solution, car } \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \in [-1;1] \text{ et } \cos(x) \neq -2. \end{cases}$

$\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}. \\ S_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right\}. \end{array}}$$

d)

g) $2\sin^2(x) + 7\cos(x) + 2 = 0 \overset{\text{car } \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}{\iff} 2(1 - \cos^2(x)) + 7\cos(x) + 2 = 0 \iff -2\cos^2(x) + 7\cos(x) + 4 = 0$

Posons $Y = \cos(x)$: $-2Y^2 + 7Y + 4 = 0$: $\Delta = 7^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 49 + 32 = 81.$

$\Delta > 0$, donc ce binôme a pour racines : $\begin{cases} Y_1 = \frac{-7 - \sqrt{81}}{-4} = \frac{-7-9}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4 \\ \text{et} \\ Y_2 = \frac{-7+9}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Donc on obtient les équations : $\underbrace{\cos(x) = 4}_{\text{Pas de solution, car } \forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos(x) \leq 1.}$ et $\cos(x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).$

$\cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

$$\boxed{S_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\frac{2\pi}{3} \,;\, \frac{2\pi}{3}\right\}}$$

h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos(x) = \cos(x + \pi) \iff \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = x + \pi + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -x - \pi + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

$$\boxed{S_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\frac{2\pi}{3} \,;\, -\frac{2\pi}{9} \,;\, -\frac{8\pi}{9} \,;\, \frac{4\pi}{9}\right\}.}$$

3)

Si x vérifie : $4\cos^2(x) - 1 = 0$, alors $4\cos^2(x+\pi) - 1 = 4\left(\cos(x+\pi)\right)^2 - 1 = 4\left(-\cos(x)\right)^2 - 1$

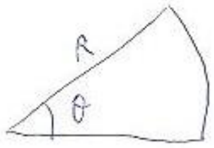
$$4\cos^2(x+\pi) - 1 = 4 \times (-1)^2 \times \left(\cos(x)\right)^2 - 1 = 4\cos^2(x) - 1 \underset{\text{par donnée.}}{=} 0$$

Donc $4\cos^2(x+\pi) - 1 = 0$ ce qui signifie que le réel $x + \pi$ est solution de l'équation (E) : $4\cos^2(x) - 1 = 0$ dès que x est solution de (E).

Idem avec $x - \pi$ vu que $\cos(x - \pi) = \cos(x - \pi + 2\pi) = \cos(x + \pi)$!

Exercice IV

Tout d'abord déterminons l'aire d'une portion de disque de rayon R, et d'angle au centre θ radians :



Cette aire est proportionnelle à θ :

Mesure de l'angle (Rad)	2π	θ
Aire	πR^2	$\mathcal{A}$

avec $\mathcal{A} = \dfrac{\pi \times R^2 \times \theta}{2\pi} = \dfrac{R^2 \times \theta}{2}$.

1) L'aire verte, nommée $\mathcal{A}_v$ est égale à : $\mathcal{A}_v = \dfrac{b^2 \times \theta}{2} - \dfrac{a^2 \times \theta}{2} = (b^2 - a^2) \times \dfrac{\theta}{2}$.

2) $DB = b - a$ car $b > a$.

$\overset{\frown}{ED} = a \times \theta$ (θ est en radians)

$\overset{\frown}{CB} = b \times \theta$ (θ en radians).

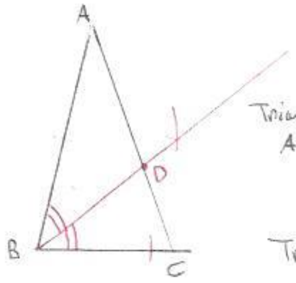
Or, $\mathcal{A}_v = (b^2 - a^2) \times \dfrac{\theta}{2} = (b-a)(b+a) \times \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{DB}{2} \times (b+a) \times \theta = \dfrac{DB}{2} \times (a\theta + b\theta)$

$\mathcal{A}_v = \dfrac{DB}{2} \times \left(\overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{CB} \right)$.

Exercice IV

(3)

a)



Triangle ABC : $\begin{cases} \widehat{BAC} = \frac{\pi}{5} \text{ rad.} \\ \underline{\underline{\widehat{ABC} = \widehat{ACB}}} = \dfrac{\pi - \frac{\pi}{5}}{2} = \dfrac{\frac{4\pi}{5}}{2} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{5}}} \end{cases}$

Triangle ADB : $\begin{cases} \widehat{ABD} = \dfrac{\frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{\pi}{5} \text{ (bissectrice).} \\ \widehat{BAD} = \frac{\pi}{5} \\ \widehat{BDA} = \pi - \left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}. \end{cases}$

Triangle BCD :

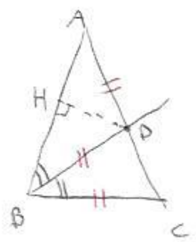
$\underline{\widehat{CBD} = \frac{\pi}{5}}$; $\underline{\widehat{BCD} = \frac{2\pi}{5}}$; $\underline{\widehat{BDC}} = \pi - \widehat{BDA} = \pi - \frac{3\pi}{5} = \underline{\frac{2\pi}{5}}.$

b) Vu que $\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = \frac{\pi}{5}$, le triangle DAB est isocèle en D, par suite, $\underline{\underline{DA = DB}}$.

De même, $\widehat{BDC} = \widehat{DCB} = \frac{2\pi}{5}$, le triangle BDC est isocèle en B, donc $\underline{\underline{BC = DB}}$

Donc on a : $\boxed{DA = DB = CB}$

c) $a = BC$



Soit H le pied de la hauteur issue de D du triangle ABD.
Comme BDA est isocèle en D (~~vu~~ vu à la question b), on a :
$AB = 2BH.$

et dans le triangle BHD rectangle en H on a :

$\cos(\widehat{HBD}) = \frac{BH}{BD}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{BH}{a}$ $\left(a = BC = BD\right)$ question b).

Donc $BH = a\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\boxed{AB} = 2BH = \boxed{2a\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ (*)

Le même raisonnement appliqué au triangle BDC avec $\widehat{BCD} = \frac{2\pi}{5}$ conduit sans peine à :

$\boxed{CD = 2a\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}.$

Enfin,

Dans le triangle ABK rectangle en K : (K = Milieu de [BC] = pied de la hauteur issue de A de ABC car ABC isocèle en A.

$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{BK}{AB}$

Donc $BK = AB \times \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \overbrace{2a\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}^{= AB \text{ d'après } (*)}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Or $\underline{BK = \frac{1}{2}BC}$, donc $\underline{\underline{BC = 2BK = 4a\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}}$

d) $AD = AC - CD = AB - CD$ car $AC = AB$.

$AD = 2a\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2a\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Or $AD = CB = a$

Donc : $2a\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2a\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = a$.

Par suite, $2a\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = a$.

Or $\underline{a \neq 0}$, $a = BC$, et ABC non aplati, donc : $\frac{2a}{a}\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{a}{a}$

D'où $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = 1$ et $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}}$. $\boxed{1}$

Enfin, $\begin{cases} BC = a \\ \text{et} \\ BC = 4a\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{cases}$, donc : $a = 4a\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

d'où ($a \neq 0$), on a : $1 = 4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

D'où $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}}$. $\boxed{2}$

e) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab - b^2) = 4ab$.

On a : $4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1$. Posons $a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $b = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

$\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ se traduisent par : $\begin{cases} a - b = \frac{1}{2} \\ 4ab = 1 \end{cases}$

$$4ab = 1 \iff \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right)\right)^2 - \underbrace{\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right)\right)}_{\text{résultat } \boxed{1}}^2 = 1$$

$$\iff \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right)\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\iff \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right)\right)^2 = 1 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}.$$

donc $\left| \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}. \end{array} \right.$

Or $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$

Donc $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}}$ (*)

Ainsi on a : $\left\{ \begin{array}{ll} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} & \text{relation } \boxed{1} \\ \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} & \text{relation } (*). \end{array} \right.$

Résolvons le système où les inconnues sont $\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}_{=a}$ et $\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}_{=b}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b = \frac{1}{2} \quad (L_1) \\ a + b = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (L_2) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (L_1+L_2) \quad 2a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ (L_1-L_2) \quad -2b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ b = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \end{array} \right.$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

Très joli exercice !!!

Exercice VI

Affirmation 1 : Faux : Contre-exemple : $x = \frac{\pi}{4}$: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Affirmation 2 : Vraie : Prenons $x = -\frac{3\pi}{4}$ et $y = \frac{\pi}{4}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(x+y) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \\ \cos(x) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(y) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Donc } \cos(x) + \cos(y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \end{array}\right.$$

Ainsi, on a bien : $\cos\left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Affirmation 3 Faux :

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\quad$ $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$.

$$\boxed{\cos\left(-\frac{37\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{37\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{37\pi}{4} - 8\pi\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Affirmation 4. Vraie.

Pour tout réel x, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Or $1 < 2$, donc, pour tout réel x, $\sin(x) < 2$.

Exercice facultatif

Exercice VI (Joli !)

Méthode 1 :

Soit a un angle dont la mesure est exprimée en degré.

alors $a \times \frac{\pi}{180}$ est la mesure de ce même angle, en radian car $1 \deg \equiv \frac{\pi}{180}$ rad.

On cherche a tel que : $\sin(a) = \sin\left(a \times \frac{\pi}{180}\right)$

$$\iff \left| \begin{array}{l} a = a \times \frac{\pi}{180} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ a = \pi - a \times \frac{\pi}{180} + k \times 2\pi \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{ll} (*) & a\left(1 - \frac{\pi}{180}\right) = k \times 2\pi \\ & \text{ou} \\ (**) & a\left(1 + \frac{\pi}{180}\right) = k \times 2\pi + \pi \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

En particulier, faisons $k = 0$ dans $(**)$:

Il vient que : $a\left(1 + \frac{\pi}{180}\right) = \pi$

Donc $\boxed{a} = \dfrac{\pi}{1 + \frac{\pi}{180}} = \dfrac{\pi}{\frac{180 + \pi}{180}} = \boxed{\dfrac{180\pi}{180 + \pi}}$

Rq : $(*)$ et $(**)$ permettent de déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles $\sin(a \deg) = \sin(a \text{ rad})$.

Méthode 2 :

$$\frac{180\pi}{180 + \pi} \deg = \frac{\pi}{180} \times \frac{180\pi}{180 + \pi} \text{ rad} = \frac{\pi^2}{180 + \pi} \text{ rad}.$$

$$\sin\left(\frac{180\pi}{180 + \pi} \deg\right) = \sin\left(\frac{\pi^2}{180 + \pi} \text{ rad}\right)$$

Or, $\sin(\pi - X) = \sin(X)$, donc $\sin\left(\frac{\pi^2}{180 + \pi}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi^2}{180 + \pi}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi^2}{180 + \pi}\right) = \sin\left(\frac{\pi(180 + \pi) - \pi^2}{180 + \pi}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi^2}{180 + \pi}\right) = \sin\left(\frac{180\pi + \pi^2 - \pi^2}{180 + \pi}\right) = \sin\left(\frac{180\pi}{180 + \pi}\right) \blacksquare$$