**Exercice I**

**35 1.**

| $x$ | $-4$ | | $-1$ | | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ |

**2. a.** Le maximum de $f$ sur $[-4 ; 5]$ est 3 et il est atteint en 1.

**b.** Le maximum de $f$ sur $[1 ; 5]$ est 3 et il est atteint en 1.

**Exercice II**

47a) $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 2019$

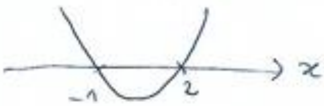
$f'(x) = 3x^2 - 1{,}5 \times 2x - 6$

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2)$

Étude du signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ : $3 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que le trinôme $x^2 - x - 2$.

Ce dernier a pour racines évidentes : $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.

Vu que $a = 1$, $(a > 0)$ on a :




donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $2025{,}5$ | $\searrow$ | $2009$ | $\nearrow$ | |

$f(-1) = -1 - 1{,}5 + 6 \times 1{,}5 + 2019$

$f(-1) = -2{,}5 + 9 + 2019 = 2025{,}5$

$f(2) = 8 - 1{,}5 \times 4 - 6 \times 2 + 2019$

$f(2) = -10 + 2019 = 2009$

50a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ où $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$ :

$f(x) = \frac{1}{v(x)}$ où $\begin{cases} v(x) = x^2-1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

$f'(x) = \frac{-v'(x)}{v^2(x)} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$.

Comme $(x^2-1)^2 > 0$ vu que $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$, $f'(x)$ a le même signe que $-2x$ :

$f'(x) \geq 0 \iff -2x \geq 0 \iff x \leq 0$

d'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | ‖ | ↗ | $-1$ | ↘ | ‖ | ↘ | |

**De même : 51b) : on dérive un quotient de type u/v et l'étude du signe de la dérivée se ramène à celle d'un trinôme, fait X fois en cours…..**

**b.** $f'(x) = \frac{3x^2+4x+1}{(2x^2+x)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-0{,}5$ | | $-1/3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $3$ | ↘ | ‖ | ↘ | $\frac{1}{3}$ | ↗ | ‖ | ↗ | |

<u>**Exercice III**</u>

**61**

**1. a.** $f'(x) = 3x^2 - 0{,}75$ et $g'(x) = 3x^2 + 0{,}75$.

**b.** $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $g$ est monotone croissante sur $\mathbb{R}$.

**2.** $f$ est représentée par $\mathcal{C}_2$ et $g$ est représentée par $\mathcal{C}_1$.

**Exercice IV**

1. Sur l'intervalle $[-3, -1]$, tous les points de la courbe ont une ordonnée négative. VRAIE
2. Sur l'intervalle $]-1\,;\,2[$, on lit que $f'(x) > 0$, donc que $f$ est croissante sur cet intervalle. VRAIE
3. Sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$, on a $f'(x) > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $]-1\,;\,0[$. Or on sait que $f(0) = -1$. D'après la croissance stricte sur l'intervalle tous les points de cet intervalle ont une image par $f$ inférieure à $-1$. FAUSSE
4. Pour $x = 0$, on lit $f'(0) = 1$ et on sait que $f(0) = -1$.
   On sait que l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est
   $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y - (-1) = 1x \iff y = x - 1$. Cette tangente contient bien le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ car ces cordonnées vérifient l'équation de la tangente. VRAIE

1* : car $C_{f'}$ est située sous-l'axe des abscisses sur [-3 ;1].

**Exercice V**

**64**

**a.** $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2)$

b) Etudions le signe de $f'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$ :

$f'(x) = 4x(x-2)(x+2)$.

Faisons un tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\underbrace{4x(x-2)(x+2)}_{f'(x)}$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

D'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

En particulier si $x \in [-3\,;7]$ :

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | $3$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 19 | $\searrow$ | $-6$ | $\nearrow$ | 10 | $\searrow$ | $-6$ | 19 | 2019 |

$f(-3) = (-3)^4 - 8\times(-3)^2 + 10$

$f(-3) = 19$

$f(-2)$, $f(2)$ et $f(7)$ calculé à l'aide d'une calculatrice

$f(3) = 19$

c) Grâce au tableau de variation précédent et à la valeur $f(3) = 19$ on peut dire que :

Si $0 \leq x \leq 3$, alors $-6 \leq f(x) \leq 19$.

Si $-3 \leq x \leq 7$, alors $-6 \leq f(x) \leq 2019$.

**Exercice VI**

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x$, $f'(x) = 3x^2 + 2x + a$.

D'après le théorème de Lagrange, $f$ croît sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout réel $x$, $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0 \iff 3x^2 + 2x + a \geq 0$. Or un trinôme est de signe constant ssi $\Delta \leq 0$.
(ici du signe de 3, donc positif).

Or, $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times a = 4 - 12a$.

$\Delta \leq 0 \iff 4 - 12a \leq 0 \iff 4 \leq 12a \iff \frac{4}{12} \leq a \iff a \geq \frac{1}{3}$.

$$\boxed{S_a = \left[\frac{1}{3} ; +\infty\right[.}$$

---

**Exercice VII**

**1. a.** Le ruban recouvre 4 hauteurs et 4 cotés avant le nœud, donc $1 = 4h + 4x$.
**b.** $x$ est une longueur donc $x \geq 0$ et si $h = 0$, $4x = 1$ donc $x = 0{,}25$.
**c.** $h = \frac{1-4x}{4} = \frac{1}{4} - x$
**d.** $V = x^2 \times h = x^2(-x + \frac{1}{4})$

On développe l'expression de V avant de dériver : $V(x) = -x^3 + \frac{1}{4}x^2$.

**2. a.** $V'(x) = -3x^2 + \frac{1}{2}x = -3x(x - \frac{1}{6})$

b. *Ici $x$ est positif, donc $-3x$ est négatif, donc $V'(x)$ a le signe contraire de l'expression* $x - \frac{1}{6}$*, donc $V'(x)$ a le même signe que $\frac{1}{6} - x$. $V'(x) \geqslant 0$ équivaut donc à $\frac{1}{6} - x \geqslant 0$ c'est-à-dire à $x \leqslant \frac{1}{6}$.*

| $x$ | 0 | | 1/6 | | 0,25 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | 0 | + | 0 | − | |
| $V(x)$ | 0 | ↗ | 1/432 | ↘ | 0 |

**3.** Le volume maximal est atteint pour $x = \frac{1}{6}$ et vaut $\frac{1}{432}$ m$^3$.

**Exercice VIII**

A) a) $f(x) = 4x + \frac{2}{x} + 1$ avec $x > 0$

$f'(x) = 4 - 2 \times \frac{1}{x^2} = 4 - \frac{2}{x^2} = \frac{4x^2 - 2}{x^2}$

b) Vu que $x > 0$, $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $4x^2 - 2$ sur $]0 ; +\infty[$.

$4x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$

$a = 4$, donc $a > 0$

(+) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (−) 0 $\sqrt{2}/2$ (+)

D'après le théorème de Lagrange :

| $x$ | 0 | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | ‖ | ↘ | $4\sqrt{2}+1$ | ↗ | |

$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 1$

$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} + 1$

$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} + 1$

$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4\sqrt{2} + 1$

Partie B $\quad 20 \text{ cm} \equiv 2 \text{ dm}$ !

a) $V_{pavé} = x \times y \times 2$ et $V_{pavé} = 1 \text{ dm}^3$, d'où $2xy = 1$ et $\boxed{y = \frac{1}{2x}}$.

(x et y en dm).

b) $\mathcal{A}_{Totale} = 2 \times xy + 2 \times x \times 2 + 2 \times y \times 2$

$\mathcal{A}_{Totale} = 2xy + 4x + 4y$.

Grâce à a), $y = \frac{1}{2x}$, donc $\mathcal{A}_{Totale} = \overbrace{1}^{2xy} + 4x + 4 \times \frac{1}{2x} = 4x + 1 + \frac{4}{2x} = 4x + 1 + \frac{2}{x}$.

Donc d'après la partie $\boxed{A}$, $\mathcal{A}_{Totale} = f(x)$.

c) En utilisant l'étude de la fonction $f$ faite à la partie $\boxed{A}$, c'est lorsque $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dm

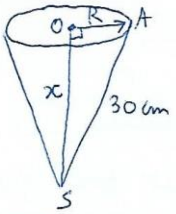
et $y = \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = x$ que la boîte fabriquée nécessite le

minimum de carton pour être fabriquée.

$x \simeq 0{,}71$ dm $\quad$ et hauteur $= 2$ dm.

$y \simeq 0{,}71$ dm

**Exercice IX**




Soit $x$ ~~la~~ hauteur de ce cône et $R$ son rayon.

Le volume du cône est :

$$V = \frac{\pi R^2 \times x}{3} \quad \text{avec } 0 \leq x \leq 30$$

Or $R^2 + x^2 = 30^2$ (application de Pythagore au triangle OSA rectangle en O) :

Donc $R^2 = 30^2 - x^2 = 900 - x^2$.

Donc en notant $f(x)$ le volume du cône, on a : $f(x) = \dfrac{\pi(900 - x^2) \times x}{3}$

$$f(x) = \frac{\pi}{3} \times x \times (900 - x^2) = \frac{\pi}{3}(900x - x^3)$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{3}(900 - 3x^2) = \frac{\pi}{3} \times 3(300 - x^2)$$

$$f'(x) = \pi(300 - x^2) = \pi(\sqrt{300}^2 - x^2) = \pi(\sqrt{300} + x)(\sqrt{300} - x)$$

$$\boxed{f'(x) = \pi(x + 10\sqrt{3})(-x + 10\sqrt{3})}$$

Étude du signe de $f'(x)$ sur $[0\,;30]$ : $\pi > 0$, $x \geq 0$ et $10\sqrt{3} > 0$, donc $x + 10\sqrt{3} > 0$

Donc $f'(x)$ a le même signe que $-x + 10\sqrt{3}$ :

$f'(x) \geq 0 \iff -x + 10\sqrt{3} \geq 0 \iff x \leq 10\sqrt{3}$.

Donc :

| $x$ | $0$ | | $10\sqrt{3}$ | | $30$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2000\pi\sqrt{3}$ | $\searrow$ | $0$ |

$$f(10\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \times 10\sqrt{3} \times (900 - (10\sqrt{3})^2) = \frac{10\pi\sqrt{3}}{3} \times (900 - 300) = \frac{10\pi\sqrt{3}}{3} \times 600 = 2000\pi\sqrt{3}$$

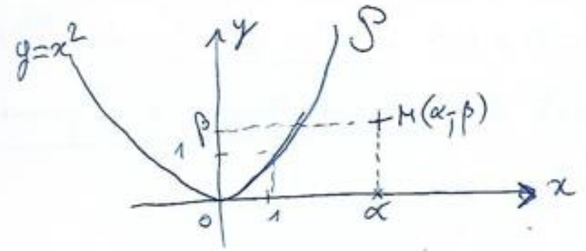
Le tableau de variation précédent montre que f atteint un maximum sur $[0\,;30]$ atteint lorsque $x = 10\sqrt{3}$ :

Il faut donc choisir pour hauteur : $x = 10\sqrt{3}$ cm et pour rayon :

$$R = \sqrt{900 - x^2} = \sqrt{900 - (10\sqrt{3})^2} = \sqrt{900 - 300} = \sqrt{600} = 6\sqrt{10} \text{ cm},$$

Pour obtenir le cône de volume maximal $2000\pi\sqrt{3}$ cm$^3$ et ayant 30 cm pour génératrice.

**Exercice X**




Soit $a\in\mathbb{R}$ et $A$ le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse $a$ : $A(a;a^2)$.

L'équation réduite de la tangente en $A$ à $\mathcal{P}$ (notée $T_A$) est :

$y = f'(a)(x-a)+f(a)$ où $\begin{cases} f(x)=x^2 \\ f'(x)=2x \end{cases}$

$y = 2a(x-a)+a^2$

$y = 2ax - 2a^2 + a^2$

$\boxed{y = 2ax - a^2}$

$T_A$ passe par $M(\alpha;\beta)$ si et seulement si : $y_M = 2a\,x_M - a^2$

$\beta = 2a\alpha - a^2$

Ce qui équivaut encore à : $\boxed{a^2 - 2a\alpha + \beta = 0. \quad (*)}$

Ne pas perdre de vue que $\alpha$ et $\beta$ sont des réels fixés. $(*)$ est donc une équation du second degré en la variable $a$.

Le discriminant $\Delta$ associé à $(*)$ est : $\Delta = (-2\alpha)^2 - 4\times1\times\beta = 4\alpha^2 - 4\beta = 4(\alpha^2-\beta)$

•) Si $\Delta<0$, c'est-à-dire si $\alpha^2<\beta$, $(*)$ n'a aucune solution réelle.

Donc si $M(\alpha;\beta)$ est situé au-dessus de $\mathcal{P}$, aucune tangente à $\mathcal{P}$ ne passe par $M(\alpha;\beta)$

••) Si $\Delta=0$, c'est-à-dire si $\beta=\alpha^2$, c'est-à-dire si $M(\alpha;\beta)\in\mathcal{P}$, alors $(*)$ admet une unique solution réelle $(\alpha)$, et il existe donc une seule tangente à $\mathcal{P}$ passant par $M(\alpha;\beta)$ lorsque $\beta=\alpha^2$.

•••) Si $\Delta>0$, c'est-à-dire si $\alpha^2>\beta$, c'est-à-dire si $M(\alpha;\beta)$ est situé au-dessous de $\mathcal{P}$, alors $(*)$ admet deux solutions réelles : il existe donc deux tangentes à $\mathcal{P}$ passant par $M(\alpha;\beta)$ lorsque $\beta<\alpha^2$.

**Exercice XI**

Exercice I

$x = DM$ et $y = BN$

1a) $MC = 1 - x$ et $CN = 1 - y$.

Le th. de Pythagore, appliqué au triangle MCN, rectangle en C, donne :

$$MN^2 = MC^2 + CN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$$

$$MN^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2$$

$$MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$$

1b) $MN = MT + TN$ car $M, T, N$ alignés dans cet ordre.

De plus, les triangles ADM et AMT sont respectivement rectangles en D et en T, ils ont deux côtés de même longueur ($AD = AT = 1$) et [AM] est leur hypoténuse commune.

Donc ils ont leur 3e côté de même longueur, i.e $DM = MT = x$.

De même pour les triangles ATN et ABN : $TN = BN = y$.

Par suite, $MN = MT + TN = x + y$.

1c) On a grâce à a) : $MN^2 = x^2+y^2-2x-2y+2$ et $MN = x+y$.

Donc $\underbrace{(x+y)^2} = x^2+y^2-2x-2y+2$

$\iff \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2xy = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2x-2y+2 \iff xy = -x-y+1 \iff xy+y = -x+1$

$\iff y(x+1) = -x+1 \iff y = \dfrac{-x+1}{x+1}$.

Par suite, $MN = x + y = x + \dfrac{-x+1}{x+1} = \dfrac{x(x+1)-x+1}{x+1} = \dfrac{x^2+x-x+1}{x+1} = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

2) $x \in ]0;1[$ et $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1} := \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u = x^2+1 \\ u' = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} v = x+1 \\ v' = 1. \end{cases}$

a) $f$ est dérivable sur $]0;1[$, et $f'(x) = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{2x(x+1)-(x^2+1)\times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$.

Or $(x+1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que le trinôme $x^2-2x+1$ sur $\mathbb{R}$.

$a=1$; $b=-2$; $c=-1$; $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times1\times(-1) = 4+4 = 8$.

$\Delta > 0$, donc ce trinôme a 2 racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = -1+\sqrt{2}$.

| | $1-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $-1+\sqrt{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $+$ | | $-$ | | | | $+$ | |

$(a>0)$

| $x$ | $0$ | | $-1+\sqrt{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $2(\sqrt{2}-1)$ | $\nearrow$ | $1$ |

$f(-1+\sqrt{2}) = \dfrac{(-1+\sqrt{2})^2+1}{-1+\sqrt{2}+1} = \dfrac{1-2\sqrt{2}+2+1}{\sqrt{2}}$

$f(-1+\sqrt{2}) = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} - 2 = 2\sqrt{2}-2$

$f(-1+\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2}-1)$.

b) $f$ décroît sur $[0;-1+\sqrt{2}]$, et $f$ croît sur $[-1+\sqrt{2};1]$.

donc $f$ admet un minimum sur $[0;1]$ atteint lorsque $x = -1+\sqrt{2}$.

Or, $MN = f(x)$, donc lorsque $x = -1+\sqrt{2}$, c'est à dire lorsque $DM = -1+\sqrt{2} \simeq 0{,}41$

la longueur MN est minimale et vaut $2(\sqrt{2}-1)$ cm.