Seconde **Corrigé du DM6** **Décembre 2023**

Exercice I

1) $O(0;0)$; $I(1;0)$; $J(1;0)$; $A(1;1)$; $K\left(\frac{1}{2};0\right)$; $L\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

1b) M est le milieu de $[JL]$, donc $M(x_M ; y_M)$ avec : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_J+x_L}{2} = \dfrac{0+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} \\ y_M = \dfrac{y_J+y_L}{2} = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$.

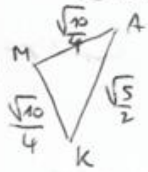
Donc $M\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$.

1c) $MA = \sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{16}}$.

$\boxed{MA} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{4}}$

1d) $MA = \frac{\sqrt{10}}{4}$ et $MK = \frac{\sqrt{10}}{4}$, donc $MA = MK$: Ainsi, M est équidistant des points A et K et à ce titre, M appartient à la médiatrice du segment $[AK]$.

2)



D'une part : $AK^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

D'autre part : $MA^2+MK^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = 2\times\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = 2\times\frac{10}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$

Ainsi, $AK^2 = MA^2+MK^2$.

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MAK est rectangle en M.

Comme $MA = MK$, $\boxed{\text{MAK est un triangle rectangle et isocèle en M}}$

3a) $\boxed{\mathcal{A}(AMK)} = \frac{MA\times MK}{2}$ car AMK rectangle en M! $= \dfrac{\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{10}}{4}}{2} = \dfrac{\frac{10}{16}}{2} = \frac{10}{16}\times\frac{1}{2} = \frac{\cancel{2}\times5}{16\times\cancel{2}} = \boxed{\frac{5}{16}}$ u. aires.

3b) Facile : H est le point d'intersection de (AK) et de la perpendiculaire à (AK) passant par M.

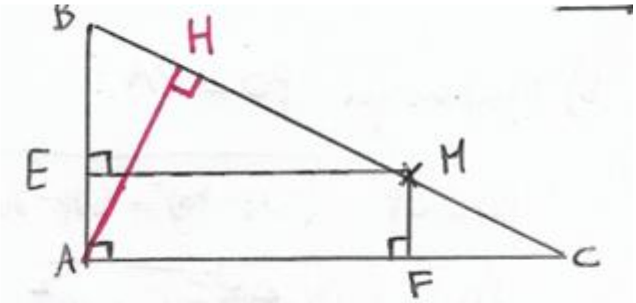
3c) On cherche ici MH :

$\underbrace{\text{Aire}(AMK)}_{q.3a} = \frac{AK\times MH}{2}$ car $(MH)\perp(AK)$.

$\frac{5}{16} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}\times MH}{2}$

$\frac{5}{16} = \frac{\sqrt{5}}{4}\times MH$, donc $\boxed{MH} = \frac{5}{16}\div\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{5}{16}\times\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{\cancel{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}\times\cancel{4}}{4\times\cancel{4}\times\cancel{\sqrt{5}}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{4}}$ u.l.

Exercice II



1b) E est le projeté orthogonal de M sur (AB), donc $(ME) \perp (AB)$

F est le projeté orthogonal de M sur (AC), donc $(MF) \perp (AC)$

ABC est rectangle en A, donc $(AB) \perp (AC)$.

Ainsi, par construction, le [illegible]gle AEMF a trois angles droits, donc quatre, et à ce titre <u>AEMF est un rectangle</u>.

2) (i) AEMF est un rectangle, donc $AM = EF$ car un rectangle a ses diagonales de même longueur.

Ainsi EF est minimale si et seulement si EF est minimale.

(ii) $M \in [BC]$, <u>AM est minimale lorsque M est le projeté orthogonal de A sur [BC]</u> (propriété du cours).

3) a) Le théorème de Pythagore, appliqué au triangle ABC rectangle en A donne :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc $BC^2 = x^2 + y^2$, et comme $BC > 0$, $\boxed{BC = \sqrt{x^2+y^2}}$.

b) $\begin{cases} \mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{x \times y}{2} = \dfrac{xy}{2} \\ \mathcal{A}(ABC) = \dfrac{BC \times AH}{2} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} \times AH}{2} \end{cases}$

donc $\dfrac{xy}{2} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} \times AH}{2}$

Donc $xy = \sqrt{x^2+y^2} \times AH$

donc $AH = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (\sqrt{x^2+y^2} \neq 0)$.

$$\boxed{AH} = \frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{x^2+y^2}} = \boxed{\frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}}$$

c) Par Pythagore appliqué au triangle AHB rectangle en H : $AB^2 = AH^2 + HB^2$ (*)

avec $AH = \dfrac{8 \times 4\sqrt{8^2+4^2}}{8^2+4^2} = \dfrac{32\sqrt{80}}{80} = \dfrac{4\sqrt{80}}{10} = \dfrac{2\sqrt{80}}{5} = \dfrac{2\sqrt{16 \times 5}}{5} = \dfrac{2 \times \sqrt{16} \times \sqrt{5}}{5} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

$AH^2 = \left(\dfrac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \dfrac{64 \times 5}{25} = \dfrac{64 \times \cancel{5}}{5 \times \cancel{5}} = \dfrac{64}{5}$.

D'où : (*) : $HB^2 = AB^2 - AH^2 = 8^2 - \dfrac{64}{5}$

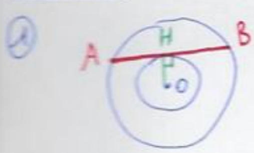
Comme $HB > 0$, $HB = \sqrt{64 - \dfrac{64}{5}} = \sqrt{64\left(1 - \dfrac{1}{5}\right)} = \sqrt{64} \times \sqrt{\dfrac{4}{5}} = 8 \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{16}{\sqrt{5}}$

$HB = \dfrac{16\sqrt{5}}{5}$ cm.

Exercice III

Exercice III

①



Soit R le rayon du grand cercle, et r celui du petit cercle.

$$\mathcal{A} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Soit H le projeté orthogonal de O sur (AB) : les triangles OHA et OHB étant identiques, H est le milieu de [AB], donc $AH = \frac{24}{2} = 12$ cm.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle AHO rectangle en H dit :

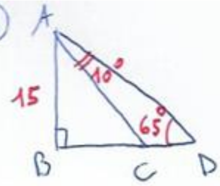
$$OA^2 = AH^2 + HO^2$$

$$R^2 = 12^2 + \underbrace{HO^2}_{r^2}$$

$$\boxed{R^2 - r^2} = 12^2 = \boxed{144}, \text{ donc } \boxed{\mathcal{A} = \pi \times 144 = 144\pi \text{ cm}^2}$$

2)

①



$AB = 15$; $\widehat{ADB} = 65°$ et $\widehat{CAD} = 10°$.

$\mathcal{P}(ACD) = AC + CD + AD$ avec :

Dans le triangle BAC rectangle en B, $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$, avec $\widehat{BAC} = 90 - (65+10) = 90 - 75 = 15°$.

Donc $\boxed{AC} = \frac{BA}{\cos(\widehat{BAC})} = \boxed{\frac{15}{\cos(15)}}$ cm.

et $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{BA}$, donc $\boxed{BC} = BA\sin(\widehat{BAC}) = \boxed{15\sin(15)}$.

Enfin, dans le triangle BAD rectangle en B : $\sin(\widehat{BDA}) = \frac{AB}{AD}$, donc $\boxed{AD} = \frac{AB}{\sin(\widehat{BDA})} = \boxed{\frac{15}{\sin(65)}}$

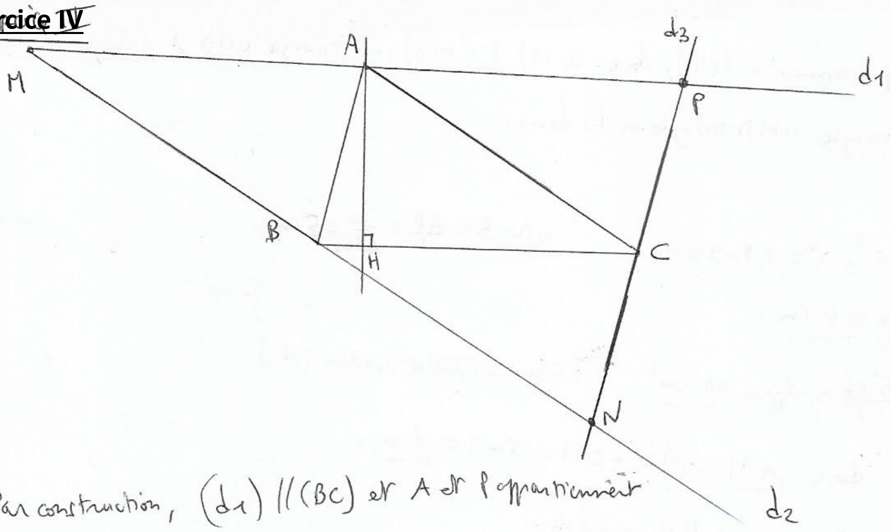
et $\tan(\widehat{BDA}) = \frac{AB}{BA}$ Donc $\boxed{DB} = BA\tan(\widehat{BDA}) = \boxed{15\tan(65)}$

Donc comme B, C, D sont ainsi alignés, on a : $\boxed{CD} = BD - BC = \boxed{15\tan(65) - 15\sin(15)}$.

D'où $\mathcal{P}(ABC) = AC + CD + AD = \frac{15}{\cos(15)} + 15\tan(65) - 15\sin(15) + \frac{15}{\sin(65)}$

Exercice IV

1)



2a) Par construction, $(d_1) // (BC)$ et A et P appartiennent à d_1, donc $(AP) // (BC)$.

De même, $(AB) // (PC)$.

Or si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux parallèles, alors c'est un pgm.

donc APCB est un pgm.

Même raisonnement pour établir que ACBM est un pgm.

2b) APCB est un pgm, or les côtés opposés d'un pgm ont la même longueur, donc $AP = BC$.

ACBM est un pgm, donc par le même raisonnement, $AM = BC$

Par suite, on a : $AP = AM$ $(= BC)$.

Or M, A, P sont ainsi alignés et $AP = AM$, donc A est le milieu du segment $[MP]$.

2c) Par définition du projeté orthogonal, $(AH) \perp (BC)$.

Or d'après 2a) on a : $(AP) // (BC)$.

On sait que si deux droites du plan sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

donc $(AH) \perp (AP)$, et comme $(AP) = (MP) = d_1$, on a : $(AH) \perp (MP)$ avec $A =$ Milieu de $[MP]$:

Ainsi, (AH) est la médiatrice du segment $[MP]$.

2d) En raisonnant de façon similaire à 2c), la hauteur issue de B du triangle ABC est la médiatrice du segment $[MN]$ et la hauteur issue de C du triangle ABC est la médiatrice du segment $[NP]$.

Or (cf. cours), les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Par suite, comme les médiatrices des côtés du triangle MNP sont les hauteurs du triangle ABC, il en résulte que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes !

Exercice V

1) a) $x \in [0;1,5] \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1,5$

b) $x \in]1,2;+\infty[\Leftrightarrow x > 1,2$

c) $x \notin [3;+\infty[\Leftrightarrow x < 3$

2) a) $1 < x \leqslant 3,4 \Leftrightarrow x \in]1;3,4[$; b) $x > 3 \Leftrightarrow x \in]3;+\infty[$.