Exercice I

1) Pour la courbe *c)*, $f'(1) = 0$ (tangente horizontale).

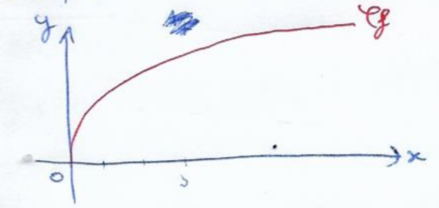
Pour la courbe *d)*, $f'(1) = -1$ (technique de l'escalier).

2a) $f'(-1) > 0$ (tracer la tangente à cette courbe en son point d'abscisse -1, cette dernière est la courbe d'une fonction affine croissante).

2b) $f'(x) < 0$ pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ 3]$ car chacune des tangentes à cette courbe en chacun des points de cet intervalle a un coefficient directeur négatif.

Exercice II

A(3;2) et B(15;4), donc (AB) a pour coefficient directeur : $\boxed{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{15-3} = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$



$f(x)=\sqrt{x}$, donc pour $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pour que (AB) soit tangente à $\mathcal{C}_f$ en $M(x\,;f(x))$, il est déjà nécessaire que $f'(x)=\frac{1}{6}$.

$f'(x)=\frac{1}{6} \iff \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{6} \iff 2\sqrt{x}=6 \iff \sqrt{x}=\frac{6}{2}=3 \iff x=3^2=9$ $(x>0)$.

Vérifions maintenant que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $C(9;\sqrt{9})$, c'est-à-dire $C(9;3)$, est la droite (AB) :

L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $C(9;3)$ a pour équation réduite :
↳ notée T_C

$y=\frac{1}{6}(x-9)+\sqrt{9}$

$\boxed{y=\frac{x}{6}+\frac{3}{2}}$

Vu que pour $A(3;2)$, $\frac{x_A}{6}+\frac{3}{2}=\frac{3}{6}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2=y_A$, $A(3;2)\in T_C$.

De même, pour $B(15;4)$, $\frac{x_B}{6}+\frac{3}{2}=\frac{15}{6}+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{8}{2}=4=y_B$, donc $B(15;4)\in T_C$.

Par suite, vu que A et B sont distincts, $T_C=(AB)$.

$\boxed{\text{(AB) est la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ en } C(9;3)}$.

Exercice III

$e(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 6$

$e'(x) = -3x^2 + 3 \times 2x + 9$

$\boxed{e'(x) = -3x^2 + 6x + 9}$

$f(x) = 18\sqrt{x}$

$f'(x) = 18 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{f'(x) = \frac{9}{\sqrt{x}}}$

$g(x) = -\frac{3}{x} + 5x^2 - x + 8 = -3 \times \frac{1}{x} + 5x^2 - x + 8$

$g'(x) = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 5 \times 2x - 1$

$\boxed{g'(x) = \frac{3}{x^2} + 10x - 1}$

$h(x) = (-5+3x)^7 = g(-5+3x)$ où $\begin{cases} g(X) = X^7 \\ g'(X) = 7X^6 \end{cases}$

$h'(x) = 3g'(-5+3x)$

$\boxed{h'(x)} = 3 \times 7(-5+3x)^6 = \boxed{21(3x-5)^6}$

$i(x) = \frac{7x+2}{x-1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = 7x+2 \\ u'(x) = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x-1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$i'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$\boxed{i'(x)} = \frac{7(x-1) - (7x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{7x - 7 - 7x - 2}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{-9}{(x-1)^2}}$

$j(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^2+1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2 - 3x + 1 \\ u'(x) = 2x - 3 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = 2x^2+1 \\ v'(x) = 2 \times 2x = 4x. \end{cases}$

$j'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{(2x-3)(2x^2+1) - (x^2-3x+1) \times 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 6x^2 - 3 - 4x^3 + 12x^2 - 4x}{(2x^2+1)^2}$

$\boxed{j'(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2 - 2x - 3}{(2x^2+1)^2}}$

$k(x) = -3\sqrt{2x+5} = -3g(2x+5)$ où $\begin{cases} g(X) = \sqrt{X} \\ g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}} \end{cases}$

$k'(x) = -3 \times 2g'(2x+5)$

$\boxed{k'(x)} = \frac{-6}{2\sqrt{2x+5}} = \boxed{\frac{-3}{\sqrt{2x+5}}}$

$m(x) = (x-8)(2x^2 + 3x - 1)$

$m(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 16x^2 - 24x + 8$

$m(x) = 2x^3 - 13x^2 - 25x + 8$

$\boxed{m'(x)} = 2 \times 3x^2 - 13 \times 2x - 25 = \boxed{6x^2 - 26x - 25}$

$\ell(x) = \frac{2}{x^2+1} = 2 \times \frac{1}{v(x)}$ où $\begin{cases} v(x) = x^2+1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

$\boxed{\ell'(x)} = 2 \times \left(\frac{-v'(x)}{v^2(x)}\right) = \frac{-2 \times 2x}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{-4x}{(x^2+1)^2}}$

$n(x) = 2x\sqrt{x+3} = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = 2x \\ u'(x) = 2 \end{cases}$

$n'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$\begin{cases} v(x) = \sqrt{x+3} \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \end{cases}$

car $\sqrt{x+3} = g(x+3)$ où $g(X) = \sqrt{X}$, $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$ et $(x+3)' = 1$.

$n'(x) = 2\sqrt{x+3} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

$n'(x) = 2\sqrt{x+3} + \frac{x}{\sqrt{x+3}}$

$n'(x) = \frac{2\sqrt{x+3} \times \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}} + \frac{x}{\sqrt{x+3}}$

$\boxed{n'(x)} = \frac{2(x+3) + x}{\sqrt{x+3}} = \boxed{\frac{3x+6}{\sqrt{x+3}}}$

$$o(x) = 2x+1-\frac{3}{x+5} = 2x+1-3\times\frac{1}{x+5} = 2x+1-3\times\frac{1}{v(x)}$$

$$o'(x) = 2-3\times\frac{(-v'(x))}{v^2(x)} \quad \text{où } \begin{cases} v(x) = x+5 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{o'(x) = 2+\frac{3}{(x+5)^2}}$$

$$q(x) = (-x^2+5x+11)^2 = (u(x))^2 \quad \text{où } \begin{cases} u(x) = -x^2+5x+11 \\ u'(x) = -2x+5 \end{cases}$$

$$\boxed{q'(x)} = 2u'(x)\,u(x) = \boxed{2(-2x+5)(-x^2+5x+11)}$$

$$p(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x+2} = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec : } \begin{cases} u(x) = x\sqrt{x} \ \text{produit.} \\ u'(x) = 1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v(x) = x+2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

dérivée d'un produit !!

$$p'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$\boxed{u'(x)} = \sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}+\frac{\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{x}}{2\cancel{\sqrt{x}}} = \sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{x}}{2}}$$

$$p'(x) = \frac{\frac{3\sqrt{x}}{2}(x+2)-x\sqrt{x}}{(x+2)^2} = \frac{\frac{3x\sqrt{x}}{2}+3\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{(x+2)^2} = \frac{\frac{x\sqrt{x}}{2}+3\sqrt{x}}{(x+2)^2} = \frac{\sqrt{x}\left(\frac{x}{2}+3\right)}{(x+2)^2}.$$

<u>Exercice IV</u>

a)

$x \geq 0$ et $f(x) = \dfrac{1-2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Pour $x>0$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = 1-2\sqrt{x} \\ u'(x) = 0-2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = 1+\sqrt{x} \\ v'(x) = 0+\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

$$f'(x) = \left(\frac{u'v-v'u}{v^2}\right)(x)$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-(1-2\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}-1-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-1\right)}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-3}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

b)

L'équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 1 est :

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$ avec : $\begin{cases} f'(1) = \frac{-3}{2\sqrt{1}\times(1+\sqrt{1})^2} = \frac{-3}{2\times2^2} = -\frac{3}{8}. \\ \text{et} \\ f(1) = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

$$y = -\frac{3}{8}(x-1)-\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{3}{8}x+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = -\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}.}$$

La première bissectrice a pour équation réduite : $y = x$, et donc pour coefficient directeur $a = 1$.

On cherche donc à résoudre, sur $]0;+\infty[$, l'équation : $f'(x) = 1$.

Or d'après l'étude du signe de la dérivée fait en amont, on a vu que sur $]0;+\infty[$, $f'(x) < 0$.

Par suite, l'équation $f'(x) = 1$ n'admet aucune solution sur $]0;+\infty[$ et la courbe représentant f n'a donc aucune tangente parallèle à la première bissectrice !

f'(x)<0 car -3 <0 et le dénominateur est positif (produit de deux facteurs positifs) et règle des signes d'un quotient.

Exercice V

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

2a) $f(0) = a\times 0^3 + b\times 0^2 + c\times 0 + d = d$.

$\boxed{f'(0)} = 3a\times 0^2 + 2b\times 0 + c = \boxed{c}$.

2b) Par lecture graphique, $f(0) = 1{,}2$ donc $d = 1{,}2$ (d'après 2a).

En $A(0;1{,}2)$, $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses, donc $f'(0) = 0$ et grâce à 2a $f'(0) = c$, donc $c = 0$.

3a) $f(2) = 0$ car $B(2;0) \in \mathcal{C}$.

$f'(2) = 0$ car en B d'abscisse 2 de $\mathcal{C}$, il y a une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3b) On a : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec : $c = 0$ et $d = 1{,}2$.

alors : $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1{,}2$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

Par 3a : $f(2) = 0 \iff a\times 2^3 + b\times 2^2 + 1{,}2 = 0 \iff 8a + 4b + 1{,}2 = 0$

$f'(2) = 0 \iff 3a\times 2^2 + 2b\times 2 = 0 \iff 12a + 4b = 0$.

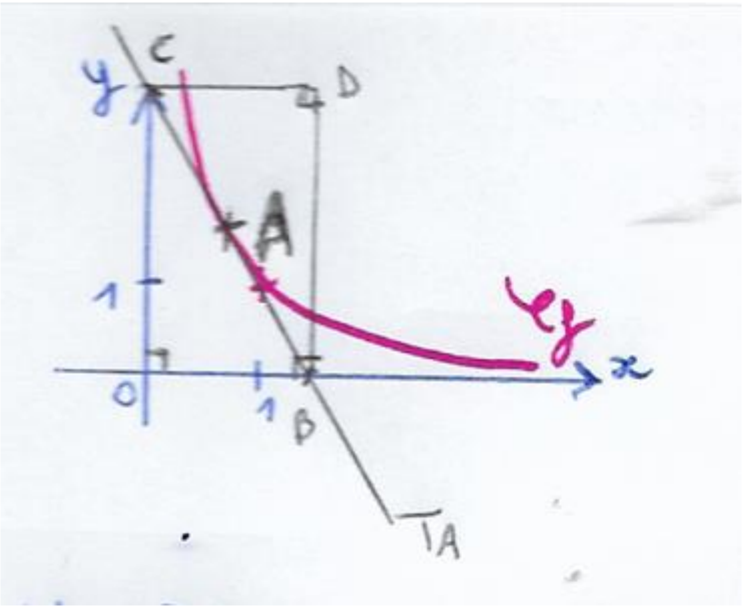
Ainsi, les réels a et b sont solution du système : $\begin{cases} 8a + 4b + 1{,}2 = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}$

3c) Résolvons le système : $\begin{cases} 8a + 4b + 1{,}2 = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4b = -8a - 1{,}2 \\ 12a - 8a - 1{,}2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \dfrac{-8a - 1{,}2}{4} \\ 4a = 1{,}2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = \dfrac{1{,}2}{4} = 0{,}3 \\ b = -2a - 0{,}3 = -2\times 0{,}3 - 0{,}3 = -0{,}9 \end{cases}$ $\quad \mathcal{S} = \{(0{,}3;-0{,}9)\}$.

Par suite, $\boxed{f(x) = 0{,}3x^3 - 0{,}9x^2 + 1{,}2}$

Exercice VI



2) $f(x) = \frac{1}{x}$ · avec $x > 0$.

Soit $a > 0$. f est dérivable en a, donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en A notée T_A qui a pour équation réduite : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec : $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ et $f(a) = \frac{1}{a}$.

$$y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}$$

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{a}{a^2} + \frac{1}{a}$$

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$$

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

T_A rencontre l'axe des abscisses lorsque $y = 0$: $-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} = 0 \iff \frac{1}{a^2}x = \frac{2}{a}$

$$\iff x = a^2 \times \frac{2}{a} = 2a$$

donc $B(2a\,;0)$.

T_A rencontre l'axe des ordonnées lorsque $x=0$, donc $y = -\frac{1}{a^2}\times 0 + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$.

donc $C\left(0\,;\,\frac{2}{a}\right)$

A a pour abscisse a et $A \in \mathcal{C}_f$ donc $A\left(a\,;\,\frac{1}{a}\right)$ car $y_A = f(a) = \frac{1}{a}$.

Par suite : $\underline{\frac{x_B+x_C}{2}} = \frac{2a+0}{2} = a = \underline{x_A}$ et $\underline{\frac{y_B+y_C}{2}} = \frac{0+\frac{2}{a}}{2} = \frac{1}{a} = \underline{y_A}$.

donc <u>A est le milieu de [BC]</u>.

3) $\mathcal{A}(OBDC) = OB\times OC = 2a\times\frac{2}{a} = 4$ car $OB = 2a$ et $OC = \frac{2}{a}$. $(a>0)$.

Ainsi, l'aire du rectangle OBDC ne dépend pas de la position du point A sur $\mathcal{C}_f$:

<u>Cette aire est constante et égale à 4 unités d'aire.</u>