Exercice I

1)

a)

$u_n = 1{,}2^n - 1{,}21^n$. (on a une F.I a priori de type "$\infty - \infty$").

$u_n = 1{,}2^n \times \left(1 - \frac{1{,}21^n}{1{,}2^n}\right) = 1{,}2^n \times \left(1 - \left(\frac{1{,}21}{1{,}2}\right)^n\right)$. Or $\frac{1{,}21}{1{,}2} = \frac{121}{120}$, donc $\frac{1{,}21}{1{,}2} > 1$.

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1{,}21}{1{,}2}\right)^n = +\infty$ et par produit et somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \left(\frac{1{,}21}{1{,}2}\right)^n\right) = -\infty$.

De même, comme $1{,}2 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}2^n = +\infty$. Par limite de produit, on a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}2^n - 1{,}21^n = -\infty$.

b)

b) $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{(-1)^n}{n}$.

Pour $n \geq 1$: $\frac{n}{n^2+1} = \frac{n \times 1}{n\left(n + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$.

Par limites de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par limite de somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

et par limite de quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \in \{-1 ; 1\}$, donc : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

donc pour $n > 0$: $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Par limite de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0}$

Pour finir, par limite de somme on a : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

2)

a) $2! = 1\times2 = 2$; $3! = 1\times2\times3 = 6$; $4! = 1\times2\times3\times4 = 24$; $5! = 1\times2\times3\times4\times5 = 120$

b) Pour $n \geq 2$, $n! = 1\times2\times\ldots\times n = (n-1)! \times n$, et comme $(n-1)!$ est un entier non nul, $(n-1)! \geq 1$, donc en multipliant les deux membres de cette dernière inégalité par n (>0) on a : $n! \geq n$.

c) On sait que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n *par :* $u_n = n$ diverge vers $+\infty$,
D'après la question précédente, $n! \geq n$, donc d'après le théorème de comparaison des limites, on a:

$$\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$$

Exercice II

1. D'après le texte :
   - $a_1 = a_0 - \dfrac{15}{100}a_0 + \dfrac{10}{100}b_0 = 1\,700 - 255 + 130 = 1\,575$
   - $b_1 = b_0 - \dfrac{10}{100}b_0 + \dfrac{15}{100}a_0 = 1\,300 - 130 + 255 = 1\,425$
2. Comme on suppose que durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe, on a, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 3\,000$.
3. D'après le texte, on a : $a_{n+1} = a_n - \dfrac{15}{100}a_n + \dfrac{10}{100}b_n$.

   Or $a_n + b_n = 3\,000$ donc $b_n = 3\,000 - a_n$. On a alors :

   $$a_{n+1} = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}(3\,000 - a_n) = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100} \times 3\,000 - \frac{10}{100}a_n$$
   $$= a_n - \frac{25}{100}a_n + 300 = \frac{75}{100}a_n + 300 = 0,75a_n + 300$$

4. **a.** Soit la propriété : $1\,200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700$.

   - **Initialisation**

     $a_0 = 1\,700$ et $a_1 = 1\,575$ donc $1\,200 \leqslant a_1 \leqslant a_0 \leqslant 1\,700$

     Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité**

     On suppose la propriété vraie au rang n, soit $1\,200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700$; c'est l'hypothèse de récurrence.

     $1\,200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700$

     $\iff 0,75 \times 1\,200 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} \leqslant 0,75 \times a_n \leqslant 0,75 \times 1\,700$

     $\iff 900 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} \leqslant 0,75 \times a_n \leqslant 1\,275$

     $\iff 900 + 300 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} + 300 \leqslant 0,75 \times a_n + 300 \leqslant 1\,275 + 300$

     $\iff 1\,200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1\,575$

     Or $1\,575 \leqslant 1\,700$ donc $1\,200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1\,700$.

     La propriété est donc vraie au rang $n+1$ donc elle est héréditaire.
   - **Conclusion**

     La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; donc d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout n, $1\,200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700$.

   b. Étude de la convergence de la suite (a_n).

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ donc la suite (a_n) est décroissante.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1\,200 \leqslant a_n$ donc la suite (a_n) est minorée.

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n = a_n - 1200$; donc $a_n = v_n + 1200$.

a. $v_{n+1} = a_{n+1} - 1200 = 0,75a_n + 300 - 1200 = 0,75(v_n + 1200) - 900$
$= 0,75v_n + 900 - 900 = 0,75v_n$

$v_0 = a_0 - 1200 = 1700 - 1200 = 500$

Donc (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,75$.

b. On en déduit que, pour tout n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,75^n$.

c. On sait que, pour tout n, $a_n = v_n + 1200$, donc $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.

6. **a.** $-1 < 0,75 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^n = 0$; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 500 \times 0,75^n = 0$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1200$.

b. On peut donc dire qu'à long terme, le nombre de sportifs dans le club A va tendre vers 1 200, et donc que le nombre de sportifs dans le club B va tendre vers $3000 - 1200 = 1800$.

7. **a.** On complète le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def  seuil() :
     n = 0
     A = 1 700
     while A>=1280 :
         n=n+1
         A = 0.75*A + 300
     return
```

---

b. Avec sa machine à calculer, on trouve sans peine que la valeur renvoyée est 7.

Exercice III (79 p 219)

1a) 1b) : manifestement, cette suite semble être croissante et bornée : minorée par 0 et majorée par 4.

2a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

Initialisation : Pour $n=0$: montrons que $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$.

Or $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{0{,}5 \times 0^2 + 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \ (\simeq 2{,}82)$

donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

On suppose donc que : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ (hyp. de récurrence)

Montrons alors sous cette hypothèse, que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, à savoir que : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$.

Par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

Donc $0 \leq u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \leq 16$ par croissance de la fonction carré sur $[0;4]$.

Donc $0 \leq 0{,}5u_n^2 \leq 0{,}5u_{n+1}^2 \leq 8$ car $0{,}5 > 0$.

Donc $8 \leq 0{,}5u_n^2 + 8 \leq 0{,}5u_{n+1}^2 + 8 \leq 16$

Donc : $\sqrt{8} \leq \underbrace{\sqrt{0{,}5u_n^2+8}}_{=} \leq \underbrace{\sqrt{0{,}5u_{n+1}^2+8}}_{=} \leq \sqrt{16}$ par croissance de la fonction racine sur $[0;+\infty[$.

donc : $0 \leq \sqrt{8} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

donc par p^e de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie i.e $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.}$

Rq : En posant $f(x) = \sqrt{0{,}5x^2+8}$ on pouvait aussi étudier le sens de variation de f sur $[0;4]$ et prouver que f croît sur $[0;4]$ et permettait de conclure dans l'étape d'hérédité !

2b) A la question 2a) on a établi que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, donc (u_n) croît.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$, donc (u_n) est majorée par 4.

donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.

3) a) $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = u_n^2 - 16$

$\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 16 = \left(\sqrt{0{,}5u_n^2+8}\right)^2 - 16 = 0{,}5u_n^2 + 8 - 16 = 0{,}5u_n^2 - 8.$

$\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = 0{,}5(u_n^2 - 16) = 0{,}5\,v_n.$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$

3b) Vu que (v_n) est géométrique, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n$ avec $v_0 = u_0^2 - 16 = 0^2 - 16 = -16$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = -16 \times 0{,}5^n$

Or, $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = u_n^2 - 16$, donc : $u_n^2 = v_n + 16 = -16\times 0{,}5^n + 16$

$u_n^2 = 16(1 - 0{,}5^n).$

Donc comme $u_n \geq 0$, $u_n = \sqrt{16(1-0{,}5^n)} = 4\sqrt{1-0{,}5^n}$.

c) Vu que $-1 < 0{,}5 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-0{,}5^n) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1-0{,}5^n} = \sqrt{1} = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\sqrt{1-0{,}5^n} = 4$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$

Exercice IV

① $a_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1} = 0{,}5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.

On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0{,}5a_n + 1 - 2 = 0{,}5a_n - 1 = 0{,}5(a_n - 2) = 0{,}5\,b_n$.

donc (b_n) est une suite géométrique de raison $0{,}5$: Réponse $\boxed{B}$.

② $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$.

$u_1 = u_0 + 3v_0 = 2+3 = 5$
$v_1 = u_0 + v_0 = 2+1 = 3$ (on exclut déjà la réponse d).

$u_2 = u_1 + 3v_1 = 5+9 = 14$ et $v_2 = u_1 + v_1 = 8$ (a) est exclue).

$\dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{14}{8} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$: Bonne réponse : c)

③ Réponse d) : u_{10} et v_{10} : For k in range(1, 11) signifie : $1 \leq k < 11$ et k entier

donc on fait 10 tours de boucle : on part de u_0 et $0+10=10$

④ Puisque $0 < \frac{1}{4} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, donc comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ on a par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 1}$

Enfin : $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n\times 1}{n(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par opérations sur les limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n}{n+1} = -1$, par suite, par limite de somme :

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2-\frac{n}{n+1}\right) = 1}$.

de plus, grâce à l'encadrement $1+\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq u_n \leq 2-\frac{n}{n+1}$ et au calcul des limites des termes encadrant que l'on a calculées, on peut appliquer le théorème des gendarmes et affirmer que : (u_n) converge vers 2 : réponse a).

⑤ $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n \times v_{n+1} \overset{(*)}{<} 0$, donc deux termes consécutifs sont toujours de signe contraire !
$v_0 = k$ et $k\neq 0$, donc $v_0 > 0$ ou $v_0 < 0$.
de plus, $v_0, v_2, v_4, ---, v_{10}$ sont de même signe grâce à $(*)$ et à la règle des signes d'un produit. (v_0 et v_1 sont de signe contraire, v_1 et v_2 également, donc v_0 et v_2 ont même signe...)
donc v_{10} a le même signe que $v_0 = k$: réponse c).

⑥ Par lecture graphique $f'(0)=1$.
deux droites parallèles ont même coefficient directeur.
donc T est parallèle à la droite d'équation $y=x$ ($y=1x$).
réponse a)

⑦ g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $g'(x) = 1000x^{999}+1$ et $g''(x) = 999000x^{998}$
Or pour tout réel x, $x^{998} = (x^{499})^2$, donc $x^{998} \geq 0$ et $999000 > 0$ donc pour tout réel x : $g''(x) \geq 0$: la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$: réponse b)

⑧ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$, donc (u_n) est croissante.
de plus, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leq 1$, donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1$, donc (u_n) est majorée par 1.
Par suite, la suite (u_n) converge d'après le théorème de convergence des suites monotones.
réponse b) : La suite (u_n) converge.

Exercice V

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Calculons u_1 : $u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{11}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{11}{5}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{25+11}{5} = \frac{18}{5}$.

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{11}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{11}{\frac{18}{5}}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{18}{5} + \frac{55}{18}\right) = \frac{599}{180}.$$

2. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition (c'est une fraction rationnelle).

Pour tout réel strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + 11 \times \frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{x^2-11}{x^2} = \frac{x^2-11}{2x^2}$$

Pour tout x dans l'intervalle $\left[\sqrt{11}\,;\,+\infty\right[$, on a :

$$\begin{aligned} x \geqslant \sqrt{11} &\Longrightarrow x^2 \geqslant 11 \qquad \text{car la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &\Longrightarrow x^2 - 11 \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow \frac{x^2-11}{2x^2} \geqslant 0 \qquad \text{car, pour tout réel non nul, } 2x^2 > 0 \\ &\Longrightarrow f'(x) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\,;\,+\infty\right[$, f' est à valeurs positives, donc f est croissante.

3. *Remarque :* on constate que la fonction f est telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$u_{n+1} = f(u_n)$, et par ailleurs, on va calculer $f\left(\sqrt{11}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \frac{11}{\sqrt{11}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \sqrt{11}\right) = \sqrt{11}$

Pour tout entier naturel n, on s'intéresse à l'inégalité : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_n = 5$ et $u_{n+1} = u_1 = \frac{18}{5} = 3{,}6$ et par ailleurs, on a $\sqrt{11} \approx 3{,}32$ donc on a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant \sqrt{11}$. L'inégalité est vraie à l'indice 0.

Hérédité : Pour un entier naturel n quelconque fixé, on suppose que l'inégalité est vraie pour l'indice n, c'est-à-dire que l'on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11} &\Longrightarrow f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \geqslant f\left(\sqrt{11}\right) \qquad \text{car } f \text{ est croissante sur } \left[\sqrt{11}\,;\,+\infty\right[\\ &\Longrightarrow u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant \sqrt{11} \qquad \text{grâce aux éléments de la remarque} \end{aligned}$$

Conclusion : On a montré que l'inégalité est vraie pour l'indice 0, et que, pour tout entier naturel n la véracité est héréditaire de l'indice n à l'indice $(n+1)$. En vertu du principe de récurrence, on peut en déduire que :

Pour tout n naturel, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

4. On a notamment :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt{11}$: la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{11}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1}$: la suite (u_n) est décroissante.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite est donc convergente vers une limite a, telle que $a \geqslant \sqrt{11}$.

5. u est une suite convergente vers une limite réelle a et u a une relation de récurrence de la forme :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{*+}$, ensemble qui contient tous les termes de la suite (car celle-ci est minorée par $\sqrt{11} > 0$).

D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite a de la suite doit être une solution de l'équation $f(x) = x$.

Résolvons cette équation dans $\mathbb{R}^{*+}$:

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\iff \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right) = x \\
&\iff x + \frac{11}{x} = 2x \\
&\iff -x + \frac{11}{x} = 0 \\
&\iff -x^2 + 11 = 0 \qquad \text{car sur } \mathbb{R}^{*+}, \quad x > 0 \\
&\iff x^2 = 11 \\
&\iff x = \sqrt{11} \qquad \text{car on résout sur } \mathbb{R}^{*+}
\end{aligned}$$

L'équation n'a qu'une unique solution sur $\mathbb{R}^{*+}$, c'est $\sqrt{11}$

On en conclut donc que la suite ne peut converger que vers $\sqrt{11}$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{11}$.

Partie B - Application géométrique

1. **a.** Le rectangle R_0 a pour aire 11 et pour longueur $L_0 = 5$, donc sa largeur ℓ_0 est telle que $L_0 \times \ell_0 = 11 \iff \ell_0 = \dfrac{11}{L_0}$

   On a donc bien $\ell_0 = \dfrac{11}{5} = 2,2$.

   b. De façon général, pour tout n entier naturel :

   Le rectangle R_n a pour aire 11 et pour longueur L_n, donc sa largeur ℓ_n est telle que $L_n \times \ell_n = 11 \iff \ell_n = \dfrac{11}{L_n}$.

2. On sait que pour tout n naturel : $L_{n+1} = \dfrac{L_n + \ell_n}{2} = \dfrac{1}{2}(L_n + \ell_n) = \dfrac{1}{2}\left(L_n + \dfrac{11}{L_n}\right)$.

   La relation de récurrence vérifiée par la suite (L_n) est donc la même que celle vérifiée par la suite (u_n) dans la **partie A**. Comme de plus $L_0 = u_0 = 5$, les deux suites sont donc rigoureusement égales.

3. À la **partie A**, question **3.**, on a établi que la suite (u_n), donc la suite (L_n) est minorée par $\sqrt{11}$.

On a donc $\sqrt{11} \leqslant L_n$. De plus :

$$\begin{aligned}
\sqrt{11} \leqslant L_n &\implies \frac{1}{\sqrt{11}} \geqslant \frac{1}{L_n} && \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{*+}\\
&\implies \frac{11}{\sqrt{11}} \geqslant \frac{11}{L_n} && \text{car } 11 > 0\\
&\implies \sqrt{11} \geqslant \ell_n
\end{aligned}$$

En prenant cette inégalité et celle dont on est parti, on a bien : $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.

4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$.

   Géométriquement, cela veut dire que notre rectangle R_n a des dimensions qui tendent vers $\sqrt{11}$, donc le rectangle tend vers un carré de côté $\sqrt{11}$.

   item Ce script renvoie un encadrement de $\sqrt{11}$ par les valeurs ℓ_n et L_n, arrondies au millionième près, où n est l'argument d'appel de la fonction.

   a. Pour l'appel `heron(3)` le retour de la fonction sera donc ℓ_3 et L_3, arrondis au millionième près.

   on obtient donc les valeurs suivantes : 3,316 606 , 3,316 643

   b. Une interprétation de ces deux valeurs, c'est donc que le nombre $\sqrt{11}$ est compris entre 3,316 606 et 3,316 643, soit un encadrement d'un amplitude inférieure à 4×10^{-5}, soit une précision importante, avec seulement trois itérations de notre algorithme.

Exercice VI

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3}$.

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. $u_1 = \dfrac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \dfrac{0 - 4}{0 + 3} = -\dfrac{4}{3}$

$u_2 = \dfrac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \dfrac{-\left(-\frac{4}{3}\right) - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{12}{3}}{-\frac{4}{3} + \frac{9}{3}} = \dfrac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{5}$

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python; on la complète de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

```
def terme (n) :
    u = 0
    for i in range(n):
        u = (-u - 4) / (u + 3)
    return(u)
```

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-x-4}{x+3}$.

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition donc sur $]-3\,;\,+\infty[$.

Sur $]-3\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1(x+3) - (-x-4) \times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{-x-3+x+4}{(x+3)^2} = \dfrac{1}{(x+3)^2} > 0$;

donc la fonction f est strictement croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$.

4. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, on a : $u_n = u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_1 = -\frac{4}{3}$; donc on a; $-2 < u_1 \leqslant u_0$.

  La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  Comme $-3 < -2$ et que $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$, on se place ans l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$.
  Sur cet intervalle, la fonction f est strictement croissante donc :

  $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n \implies f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$

  $f(-2) = \dfrac{-(-2) - 4}{-2 + 3} = -2$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$

  Donc $f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ équivaut à $-2 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

  On a donc démontré que la propriété était vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour $n \geqslant 0$. D'après le principe de récurrence, on peut dire qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on a donc : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

5. On a vu que :

- pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante;
- pour tout n, $-2 < u_n$ donc la suite (u_n) est minorée.

D'après le théorème de la convergence monotone, on peut en déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$.

On remarque que, pour tout n, $u_n > -2$ entraîne $u_n + 2 > 0$ donc $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$ existe pour tout n et est strictement positive (donc non nulle).

a. $v_0 = \dfrac{1}{u_0+2} = \dfrac{1}{0+2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

b. $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+2} = \dfrac{1}{\frac{-u_n-4+2u_n+6}{u_n+3}} = \dfrac{u_n+3}{u_n+2}$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+3}{u_n+2} - \dfrac{1}{u_n+2} = \dfrac{u_n+2}{u_n+2} = 1$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0{,}5$.

c. La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0{,}5$ donc, pour tout n, $v_n = v_0 + n \times r = 0{,}5 + n$.

$v_n = \dfrac{1}{u_n+2} \iff \dfrac{1}{v_n} = u_n + 2 \iff u_n = \dfrac{1}{v_n} - 2$ donc $u_n = \dfrac{1}{n+0{,}5} - 2$, pour tout n.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+0{,}5) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+0{,}5} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

Exercice VII

A- a) Si $u_0 \leqslant u_1$, comme f croit sur I, une récurrence facile montre que (u_n) croit.

b) Si $u_0 \geqslant u_1$, le même raisonnement prouve que f décroit.

2) Facile, étudier les variations de f et appliquer ce qui a été vu avant.

B- $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2-k}$. Or comme k >2, 0 < k^2 - k < k^2, et par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ on a que $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2-k}$ bref que $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

2) Cette suite est clairement croissante (méthode de la différence, en posant $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \text{ (>0).}$$

En sommant les inégalités de même sens obtenues à la questions précédente, pour k allant de 2 (attention au membre de droite) à n, on arrive à :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Les termes de droite se simplifient deux à deux, sauf le 1/(2-1) qui reste ainsi que le – 1/n.

Ainsi : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$ et par suite, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} + 1 \leq 1 - \frac{1}{n} + 1 \; donc \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$.

Par suite, (u_n) est majorée par 2 et croissante, donc elle converge.

On peut démontrer, mais c'est une autre histoire, que cette suite converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

1) $\boxed{u_1} = \frac{1}{1^2+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$; $\boxed{u_2} = \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \boxed{\frac{11}{30}}$.

$\boxed{u_3} = \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{3^2+2} + \frac{1}{3^2+3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} = \frac{66}{660} + \frac{60}{660} + \frac{55}{660} = \boxed{\frac{181}{660}}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$

3)
```
def u(n):
   u = 0
 For k in range(1, n+1):
   u = u + 1/(n*n + k)
 return u
```

4) Manifestement, d'après Python, il semblerait que la suite (u_n) converge vers 0.

5) Pour tout entier k : si $1 \leq k \leq n$ alors $0 < n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$

donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$: $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$.

Sommons pour $k=1$, $k=2$..., $k=n$ ces n inégalités de même sens : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1}$

constante vis-à-vis de k

Donc : $n \times \frac{1}{n^2+n} \leq u_n \leq n \times \frac{1}{n^2+1}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}}$$

Donc : $\frac{n \times 1}{n(n+1)} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}$, donc $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n}{n(n+\frac{1}{n})}$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+\frac{1}{n}}$. Par limites de référence :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes

la suite (u_n) converge vers 0 : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$