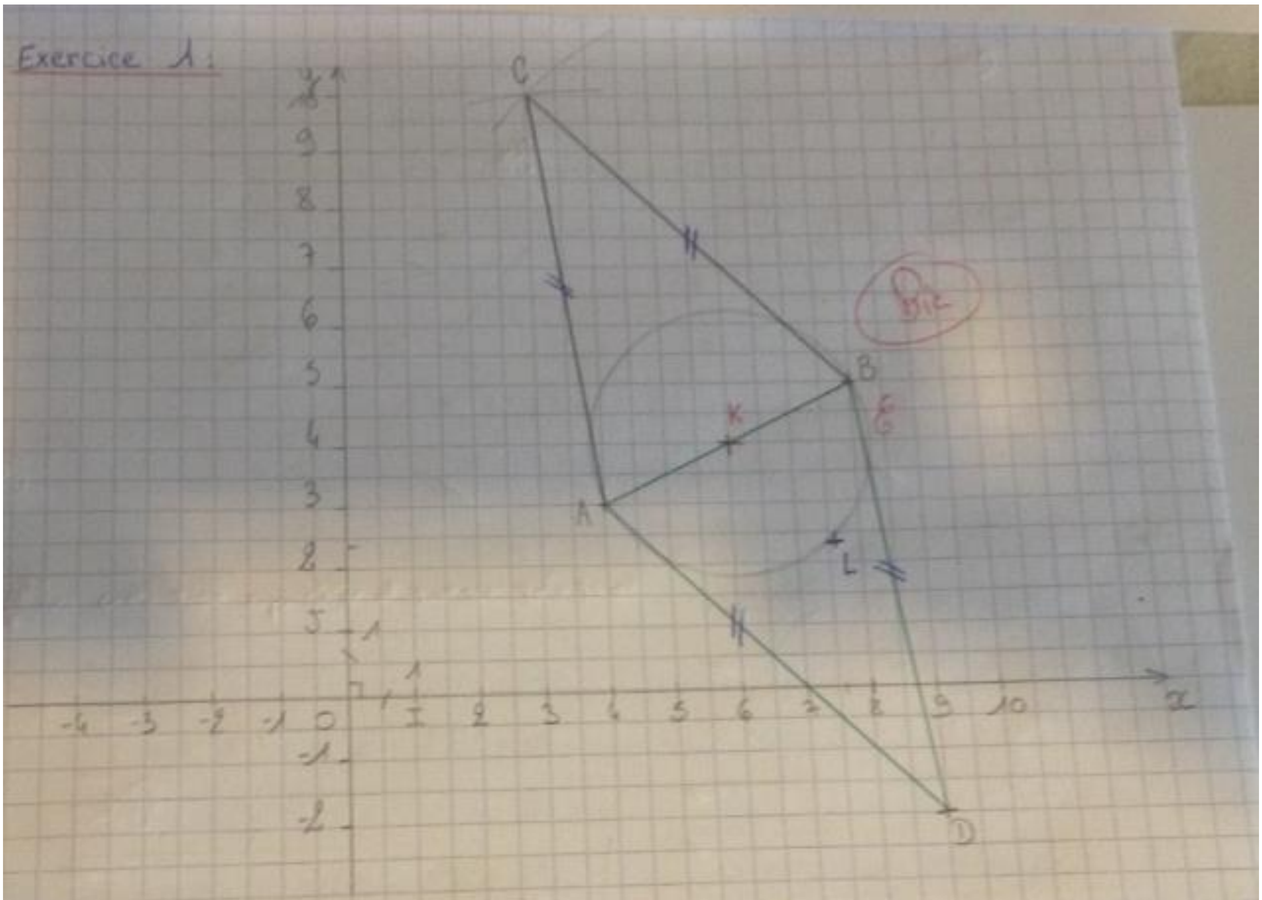
Exercice I



b) On sait que K = milieu de [AB], donc K a pour coordonnées $(x_K ; y_K)$

$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$

$x_K = \frac{4+8}{2}$ $y_K = \frac{3+5}{2}$

$x_K = \frac{12}{2} = 6$ $y_K = \frac{8}{2} = 4$

Donc $\boxed{K(6;4)}$

$BD = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2}$ $\qquad$ $AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}$

$BD = \sqrt{(8 - 9)^2 + (5 - (-2))^2}$ $\qquad$ $AD = \sqrt{(4 - 9)^2 + (3 - (-2))^2}$

$BD = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49}$ $\qquad$ $AD = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25}$

$BD = \boxed{\sqrt{50} \text{ unités de longueur}}$ $\qquad$ $AD = \boxed{\sqrt{50} \text{ unités de longueur}}$

$BD = AD$, donc le triangle ABD est bien isocèle en D.

d) On sait que le point C est le symétrique du point D par rapport au point K, donc K = milieu de [CD].

$x_K = \dfrac{x_C + x_D}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_C + y_D}{2}$

$6 = \dfrac{x_C + 9}{2}$ $\qquad$ $4 = \dfrac{y_C + (-2)}{2}$

$12 = x_C + 9$ $\qquad$ $8 = y_C + (-2)$

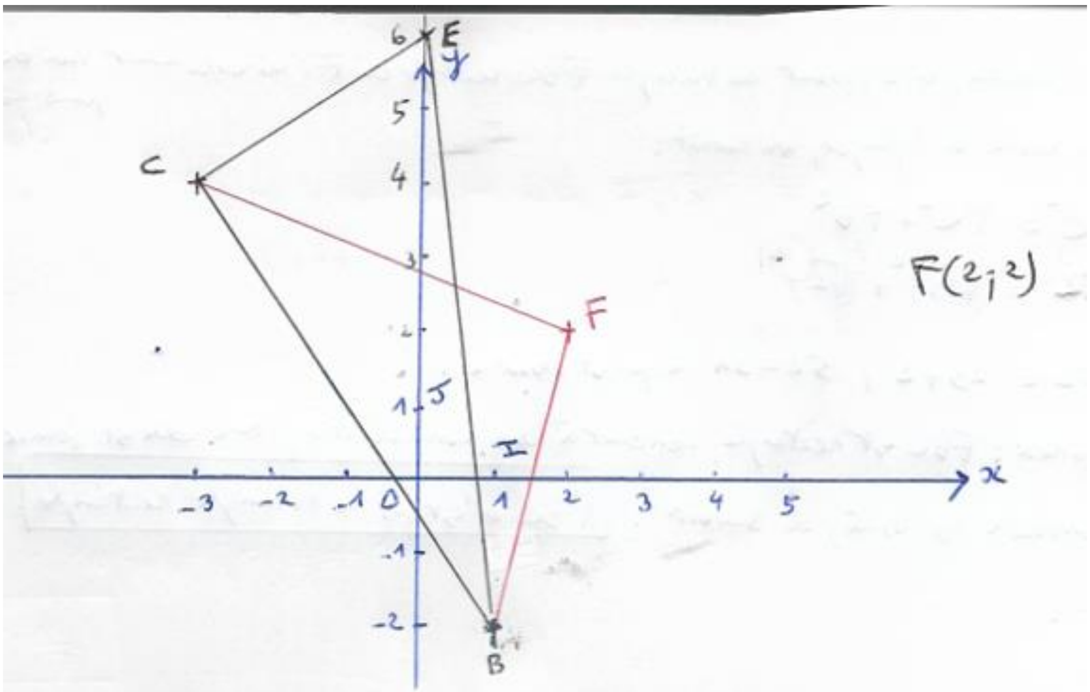
$x_C = 12 - 9 = 3$ $\qquad$ $y_C = 8 + 2 = 10$ $\qquad$ $\boxed{\text{Donc } C(3\,;10).}$

e) On peut calculer les longueurs CA et CB, on trouve sans peine que : $CA = CB = \sqrt{50}$.

Par suite, grâce aux calculs effectués en 1c), on a : $CA = CB = BD = DA = \sqrt{50}$, et par suite, le quadrilatère $ACBD$ est un losange en tant que quadrilatère ayant ses quatre côtés de la même longueur.

Exercice II

1)
B(1;-2)
C(-3;4)
E(0;6)



Il suffit, pour démontrer que les droites (BC) et (EC) sont perpendiculaires, de démontrer que le triangle BCE est rectangle en C :

Calculons au préalable la longueur des trois côtés du triangle BEC :

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-(-2))^2}$

$BC = \sqrt{(-4)^2 + 6^2}$

$BC = \sqrt{16+36}$

$BC = \sqrt{52}$

$EC = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2}$

$EC = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-6)^2}$

$EC = \sqrt{9+4}$

$EC = \sqrt{13}$

$BE = \sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2}$

$BE = \sqrt{(0-1)^2 + (6-(-2))^2}$

$BE = \sqrt{(-1)^2 + 8^2}$

$BE = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$.

D'une part : $BE^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$.

D'autre part : $BC^2 + CE^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{13})^2 = 52 + 13 = 65$.

Ainsi on a : $BE^2 = BC^2 + CE^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BEC est rectangle en C et par suite, les droites (BC) et (EC) sont perpendiculaires.

2)

Calculons les longueurs BC et FT, où T désigne le centre du cercle de diamètre BC.

Soit K le milieu de [BC] : $K\left(\frac{x_B + x_C}{2} ; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$

$K\left(\frac{1+(-3)}{2} ; \frac{-2+4}{2}\right)$ $K(-1 ; 1)$

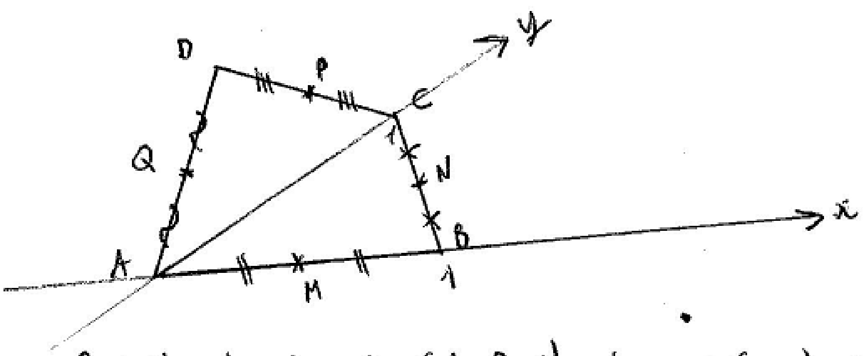
$KF = \sqrt{(x_F - x_K)^2 + (y_F - y_K)^2} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ u.l

Le rayon R du cercle de diamètre BC est KB.

Or, $KB = \sqrt{(x_B - x_K)^2 + (y_B - y_K)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ u.l

Ainsi, $KF \neq KB$ vu que $\sqrt{10} \neq \sqrt{13}$. Par suite, F n'appartient pas au cercle de diamètre BC.

Exercice III



On se place dans le repère $(A ; B ; C)$: donc $A(0;0)$; $B(1;0)$ et $C(0;1)$
$D(a;b)$.

M = Milieu de [AB], donc $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $M\left(\frac{0+1}{2};\frac{0+0}{2}\right)$ $\boxed{M\left(\frac{1}{2};0\right)}$.

N = Milieu de [BC], donc $N\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$ $N\left(\frac{1+0}{2};\frac{0+1}{2}\right)$ $\boxed{N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$

P = Milieu de [CD], donc $P\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right)$ $P\left(\frac{0+a}{2};\frac{1+b}{2}\right)$ $\boxed{P\left(\frac{a}{2};\frac{b+1}{2}\right)}$

Q = Milieu de [DA], donc $Q\left(\frac{x_A+x_D}{2};\frac{y_A+y_D}{2}\right)$ $Q\left(\frac{0+a}{2};\frac{0+b}{2}\right)$ $\boxed{Q\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)}$

2c) V = Milieu de [MP], donc $V\left(\frac{x_M+x_P}{2};\frac{y_M+y_P}{2}\right)$ $V\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}}{2};\frac{0+\frac{b+1}{2}}{2}\right)$
$V\left(\frac{\frac{a+1}{2}}{2};\frac{\frac{b+1}{2}}{2}\right)$ $\boxed{V\left(\frac{a+1}{4};\frac{b+1}{4}\right)}$.

W = Milieu de [NQ], donc $W\left(\frac{x_N+x_Q}{2};\frac{y_N+y_Q}{2}\right)$ $W\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}}{2};\frac{\frac{1}{2}+\frac{b}{2}}{2}\right)$
$W\left(\frac{\frac{1+a}{2}}{2};\frac{\frac{1+b}{2}}{2}\right)$ $\boxed{W\left(\frac{a+1}{4};\frac{b+1}{4}\right)}$

2d) V et W ont les mêmes coordonnées, donc sont confondus.
[MP] et [NQ] qui sont les diagonales du quadrilatère MNPQ se coupent donc en leur milieu.
donc $\boxed{\text{MNPQ est un pgm}}$ en tant que quadrilatère ayant ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

Conclusion : quelle que soit la nature du quadrilatère ABCD, le quadrilatère MNPQ s'appuyant sur les milieux des côtés de ABCD est toujours un parallélogramme.

Point logique

Facile : 5 véridiques et 5 menteurs, le premier de file mentant nécessairement, le dernier de file disant vrai, on peut même dire que les 5 premiers de la file mentent et les 5 derniers disent vrai.