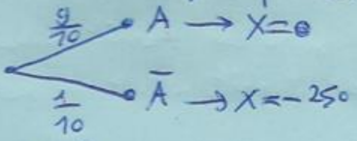
Exercice I

Notons A l'évènement : un colis arrive à destination.

et X la variable aléatoire égale à la somme d'argent perdue s'il envoie ensemble les objets.

$X(\Omega) = \{-250 ; 0\}$



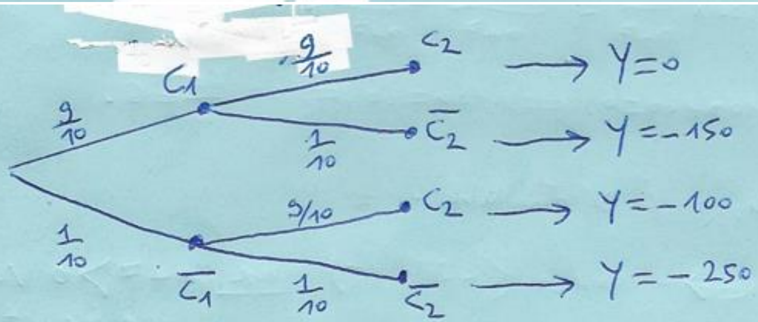
$E(X) = \frac{9}{10} \times 0 + \frac{1}{10} \times (-250) = -25$ €.

En moyenne, s'il envoie groupés les deux paquets, il perd 25 € par envoi.

Soit Y la variable aléatoire égale à la somme d'argent perdue s'il envoie séparément les deux objets : Notons C_1 : le 1er colis à 100 € arrive à destination.

C_2 : le 2e colis à 150 € arrive à destination.

On peut légitimement faire l'hypothèse que C_1 et C_2 sont des évènements indépendants.



Loi de probabilité de Y :

$(Y = y_i)$	-250	-150	-100	0
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$	$\frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{100}$	$\frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{100}$	$\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{100}$

ou encore :

$(Y = y_i)$	-250	-150	-100	0
$P(Y = y_i)$	0,01	0,09	0,09	0,81

$E(Y) = -250 \times 0{,}01 - 150 \times 0{,}09 - 100 \times 0{,}09 + 0 \times 0{,}81$

$E(Y) = -2{,}5 - 13{,}5 - 9 = -25$ €.

En moyenne, s'il envoie séparément les deux paquets, il perd également 25 € pour l'envoi des deux objets.

<u>Conseil</u> : Vu que $E(X) = E(Y)$, peu importe le choix qu'il fait !

Avec une calculatrice : $\sigma(X) = 75$ et $\sigma(Y) \simeq 54{,}08$: $\sigma(Y) < \sigma(X)$

Pour Y les valeurs prises sont moins dispersées autour de $E(Y)$ que les valeurs prises par X se sont autour de $E(X)$: Cela peut donc être plus rassurant de choisir l'envoi séparé des objets

Exercice II

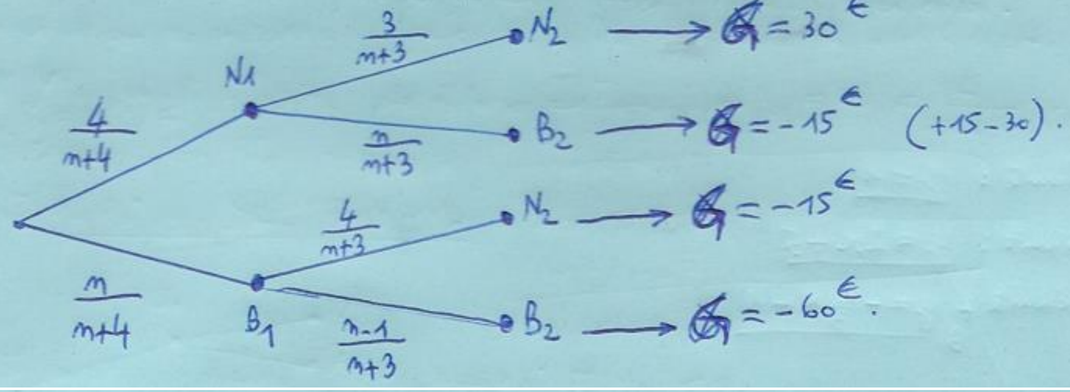
Notons N_1 = " Tirer une boule noire au 1er tirage".

B_1 = " Tirer une boule blanche au 1er tirage".

N_2 = " Tirer une boule noire au 2e tirage".

B_2 = " Tirer une boule blanche au 2e tirage".

(!) Tirages sans remise ici. Au 1er tirage, l'urne contient $n+4$ boules en tout, tandis qu'au second tirage, elle n'en contient plus que $n+3$!



Donnons la loi de probabilité de G :

$G(\Omega) = \{-60\,;-15\,;30\}$ avec : $P(G=-60) = \frac{n}{n+4} \times \frac{n-1}{n+3} = \frac{n(n-1)}{(n+4)(n+3)}$

$P(G=-15) = P(N_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap N_2)$ (Probabilités totales).

$P(G=-15) = \frac{4}{n+4} \times \frac{n}{n+3} + \frac{n}{n+4} \times \frac{4}{n+3} = \frac{8n}{(n+4)(n+3)}$.

Enfin, $P(G=30) = \frac{4}{n+4} \times \frac{3}{n+3} = \frac{12}{(n+4)(n+3)}$.

D'où la loi de probabilité de G :

$(G=g_i)$	-60	-15	30
$P(G=g_i)$	$\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+3)}$	$\frac{8n}{(n+4)(n+3)}$	$\frac{12}{(n+4)(n+3)}$

$$E(G) = \frac{-60n(n-1)}{(n+4)(n+3)} + \frac{(-15)\times 8n}{(n+4)(n+3)} + \frac{30\times 12}{(n+4)(n+3)}$$

$$E(G) = \frac{-60m(m-1) - 120m + 360}{(m+4)(m+3)} = \frac{-60m^2 + 60m - 120m + 360}{(m+4)(m+3)} = \frac{-60m^2 - 60m + 360}{(m+4)(m+3)}$$

$$\boxed{E(G) = \frac{60(-m^2 - m + 6)}{(m+4)(m+3)}}$$

Ce jeu sera équitable si et seulement si : $E(G) = 0 \iff -m^2 - m + 6 = 0$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

$a = -1$; $b = -1$; $c = 6$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times(-1)\times 6 = 1 + 24 = 25$.

$\Delta > 0$, donc cette équation a deux solutions : $\begin{cases} m_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-5}{2\times(-1)} = \dfrac{1-5}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ m_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+5}{-2} = \dfrac{6}{-2} = -3 \end{cases}$

⚠ $-3 \notin \mathbb{N}^*$.

donc le jeu est équitable si et seulement si $m = 2$, c'est-à-dire si l'urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

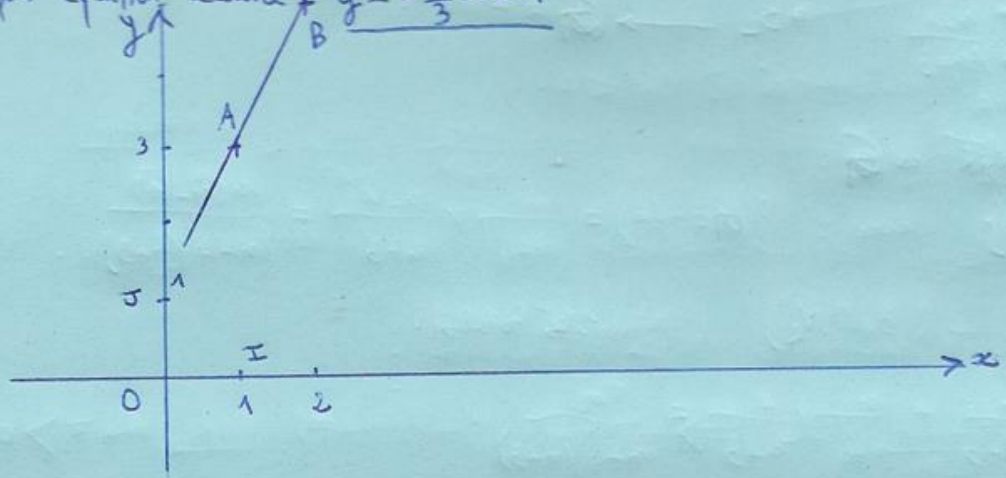
Exercice III

① d_1 a pour équation réduite : $y = 1$

d_2 a pour équation réduite : $y = 2x + 5$

d_3 a pour équation réduite : $y = -\frac{2}{3}x - 1$

②



a) $x_A \neq x_B$ car $1 \neq 2$, donc (AB) a pour équation réduite : $y = mx + p$ avec :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$y = 2x + p$

de plus, $A(1;3) \in (AB) \iff 3 = 2\times 1 + p \iff p = 3 - 2 = 1$.

donc $\boxed{y = 2x + 1 \text{ est l'équation réduite de la droite (AB)}}$

b) $C(21;45) \in (AB) \iff y_C = 2x_C + 1$ avec : $x_C = 21$ et $y_C = 45$.

Or, $2x_C + 1 = 2 \times 21 + 1 = 43$, et $43 \neq 45$, donc $\boxed{C(21;45) \notin (AB)}$.

3) $(d) \parallel (\Delta)$ et (Δ) a pour coefficient directeur $m = 5$, donc (d) a pour coefficient directeur 5 également.

(d) a pour équation réduite : $y = 5x + p$.

$K(20;-15) \in (d) \iff y_K = 5x_K + p$

$K(20;-15) \in (d) \iff -15 = 5 \times 20 + p$

$K(20;-15) \in (d) \iff p = -15 - 5 \times 20 = -15 - 100 = -115$

Ainsi, $\boxed{(d) \text{ a pour équation réduite : } y = 5x - 115}$

Exercice IV

$f(0) = 2$; $f(-1) = 1$; $f(2) = -1$.

$f'(0) = 0$ (tangente horizontale).

$f'(-1) = 2$ (Méthode de l'escalier).

$f'(2) = -\frac{1}{2}$

Exercice V

1) Car la division par 0 n'existe pas !

2) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x} = \dfrac{x(x+3)}{x} = x+3$

alors <u>la courbe de $\mathcal{C}_f$</u> est <u>la droite privée du point situé à l'intersection de cette dernière et de l'axe des ordonnées</u>. (Courbe en haut, à gauche).

$h(x) = \dfrac{5x-x^3}{x} = \dfrac{x(5-x^2)}{x} = 5-x^2$.

<u>$\mathcal{C}_h$ est la parabole (courbe en bas à gauche) privée du point A (0 ; 5).</u>

$\mathcal{C}_g$ est donc la courbe restante.

3) Pour $x \neq 0$, $f(x) = x+3$, et $\lim\limits_{x \to 0} (x+3) = 3$: Donc oui f admet une limite quand x tend vers 0 : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3}$

Pour $x \neq 0$, $h(x) = 5-x^2$, et $\lim\limits_{x \to 0} (5-x^2) = 5$: Donc h admet une limite quand x tend vers 0 : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 5}$

Pour $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{x-8}{x} = \dfrac{x}{x} - \dfrac{8}{x} = 1 - \dfrac{8}{x}$.

En donnant à x des valeurs proches de 0, par valeurs inférieures $(-0{,}01 ; -0{,}0001 \ldots)$ on trouve sans peine que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = +\infty$ et de même, si x tend vers 0 par valeurs supérieures $(0{,}01 ; 0{,}00001 \ldots)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = -\infty$.

Donc <u>g n'admet pas de limite en 0.</u>

Exercice VI

Exercice I $\quad f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

1a) Pour $h \neq 0$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{2(1+h)^2 - 3(1+h) + 1 - \overbrace{(2-3+1)}^{=0}}{h}$

$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{2(1+2h+h^2) - 3 - 3h + 1}{h} = \dfrac{2+4h+2h^2-3-3h+1}{h} = \dfrac{2h^2+h}{h} = \dfrac{2h^2}{h} + \dfrac{h}{h} = 2h+1$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} (2h+1) = 1$ et $1 \in \mathbb{R}$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1$, donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = 1$.

1b) Nommons T_A cette tangente, f est dérivable en 1, donc T_A existe.

T_A a pour équation : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$ avec : $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$.

$y = 1(x-1) = x - 1$.

1c) On étudie le signe de $d(x) = f(x) - (x-1) = 2x^2 - 3x + 1 - x + 1 = 2x^2 - 4x + 2$

$d(x) = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2$.

Donc pour tout réel x, $d(x) \geq 0$ vu que $2 > 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$.

En conclusion, la courbe représentative de f est située au-dessus de T_A, et $\mathcal{C}_f$ et T_A se coupent en A.

2a) $f'(x) = 2 \times 2x - 3 = 4x - 3$

2b) En $M(x\,;f(x))$, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale ssi $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \iff 4x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{4}$. $\quad S = \{\frac{3}{4}\}$.

En $M(\frac{3}{4}\,; f(\frac{3}{4}))$, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale. $\quad f(\frac{3}{4}) = 2 \times (\frac{3}{4})^2 - 3 \times \frac{3}{4} + 1 = 2 \times \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 1$

$f(\frac{3}{4}) = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{9}{8} - \frac{18}{8} + \frac{8}{8} = -\frac{1}{8}$. Donc $M(\frac{3}{4}\,; -\frac{1}{8})$ est l'unique point de $\mathcal{C}_f$ en lequel il y a une tangente horizontale.

2c) Donnons l'équation réduite de cette droite : 3x – 2y +2022 = 0 équivaut à : 2y = 3x + 2022 et donc y = $\frac{3}{2}x + 1011$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$.

Or deux droites parallèles ont le même coefficient directeur.

Comme le coeff. directeur de (Δ) est égal à $\frac{3}{2}$, chercher les tangentes parallèles à (Δ) revient à résoudre l'équation : $f'(x) = \frac{3}{2}$

$f'(x) = \frac{3}{2} \underset{\text{q.2a}}{\iff} 4x - 3 = \frac{3}{2} \iff 4x = 3 + \frac{3}{2} = \frac{6}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \iff x = \dfrac{\frac{9}{2}}{4} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{8}$.

$S = \{\frac{9}{8}\}$. $\mathcal{C}_f$ admet une unique tangente parallèle à (Δ) [en son point d'abscisse $\frac{9}{8}$].