Terminale Maths Groupe 3 **Corrig2 du DM 4** **Octobre 2023**

Exercice I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

a) $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1} = \dfrac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}}$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$

et par somme et quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}}$

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n + 3\sin(n)}{n^2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1}$ et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, donc $\underline{-3 \leqslant 3\sin(n) \leqslant 3}$, donc $-4 \leqslant (-1)^n + 3\sin(n) \leqslant 4$ (on a additionné membre à membre deux inégalités de même sens !!).

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{-\frac{4}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{n^2}}$ (car $n^2 > 0$, donc sens de l'inégalité inchangé en divisant par n^2).

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0}$ et $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-4}{n^2} = 0}$.

Par suite, les trois points soulignés rendent licite d'utiliser le <u>théorème des gendarmes</u>, qui permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice II

<u>43 p 185</u>

a) Il semblerait que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \in \{-1 ; 1\}$, donc $(-1)^n \geqslant -1$, donc $4 \times (-1)^n \geqslant 4 \times (-1)$ car $4 > 0$, donc $\underbrace{n + 4 \times (-1)^n}_{t_n} \geqslant n - 4$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \geqslant n-4$

c) Grâce à la question b), $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \geqslant n-4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-4) = +\infty$, donc par le <u>th. de comparaison de limites</u> :

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty}$.

d) <u>C'est faux !</u> <u>Contre-exemple</u> : la suite <u>(t_n) diverge vers $+\infty$</u> mais (t_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang :

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n = n+1 + 4(-1)^{n+1} - (n + 4(-1)^n) = \cancel{n}+1+4(-1)^{n+1} - \cancel{n} - 4(-1)^n = 1 + 4(-1)^{n+1} + 4(-1)^{n+1}$

$= 1 + 2 \times 4 \times (-1)^{n+1}$

$t_{n+1} - t_n = 1 + 8(-1)^{n+1}$ avec $8(-1)^{n+1} \in \{-8 ; 8\}$

Donc $t_{n+1} - t_n$ vaut alternativement 9 ou -7 donc n'est pas de signe constant positif !

Ainsi, (t_n) n'est ni croissante, ni décroissante !

45 p 185

$\forall n \in \mathbb{N},\ e_n = \dfrac{1}{n+5}$

a) Si $n \geq 1$, alors $n+5 \geq n$, donc $\dfrac{1}{n+5} \leq \dfrac{1}{n}$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$.

de plus, $e_n \geq 0$ car $1 > 0$ et $n+5 > 0$ (vu que $n \geq 1$).

Donc : Pour tout entier $n \geq 1$, $\boxed{0 \leq e_n \leq \frac{1}{n}}$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $0 \leq e_n \leq \frac{1}{n}$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0}$.

48 p 185

$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = -4e^{2n+3}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ 2n+3 \geq n$, donc $e^{2n+3} \geq e^n$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

donc $-4e^{2n+3} \leq -4e^n$ car $-4 < 0$; donc $\boxed{c_n \leq -4e^n}$

Or $e > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, donc comme $-4 < 0$, par limite de produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} -4e^n = -\infty}$
$e \approx 2{,}72$

d'après le th. de comparaison des limites on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty}$

58 p 186

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n^2 + 4n + 2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (4n+2) = +\infty$, donc on est en présence d'une F. I (par la somme).

Or, $u_n = n(-n+4) + 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n+4) = -\infty$, donc par limite de produit :

$$\lim_{n\to+\infty} n(-n+4) = -\infty$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$, donc par limite de somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(-n+4)+2 = -\infty$

Bref, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

94 p 191

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = e^{\frac{8}{n}}$.

a) $f(x) = e^x - 4x - 1$

f est dérivable sur $[0;1]$ et $f'(x) = e^x - 4$.

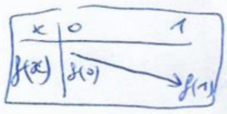
Or $0 \leq x \leq 1$; donc $e^0 \leq e^x \leq e^1$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0;1]$).

donc $e^x - 4 \leq e - 4$ avec $e \simeq 2{,}72$ donc $e - 4 \simeq -1{,}28$.
donc $e - 4 \leq 0$.

Ainsi, $\forall x \in [0;1]$, $e^x - 4 \leq 0$

$\forall x \in [0;1]$, $f'(x) \leq 0$, donc f décroît sur $[0;1]$.

b) f décroît sur $[0;1]$, donc $\forall x \in [0;1]$, $f(0) \geq f(x) \geq f(1)$



Or $f(0) = e^0 - 4\times 0 - 1 = 0$
$(e^0 = 1)$

$\forall x \in [0;1]$, $f(x) \leq f(0)$ et $f(0) = 0$, donc $f(x) \leq 0$ donc $e^x - 4x - 1 \leq 0$, donc $e^x \leq 1 + 4x$

Enfin, si $0 \leq x \leq 1$, $e^0 \leq e^x$ car exp. croît sur $\mathbb{R}$, donc $1 \leq e^x$

En "rsulte", $\boxed{\forall x \in [0;1],\ 1 \leq e^x \leq 1 + 4x}$

c) $n \geq 8$, donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{8}$ par décroissance de la fonction inverse sur $[8;+\infty[$.

donc $\frac{8}{n} \leq \frac{8}{8}$ car $8 > 0$, donc $\frac{8}{n} \leq 1$. et $\frac{8}{n} \geq 0$ (règle des signes).

Ainsi, si $n \geq 8$, alors $0 \leq \frac{8}{n} \leq 1$.

Appliquons alors la question b) avec $x = \frac{8}{n}$; $(\in [0;1])$:

$$1 \leq e^{\frac{8}{n}} \leq 1 + 4 \times \frac{8}{n}$$

$\boxed{\text{Pour } n \geq 8,\quad 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{32}{n}}$

d) Or $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par produit et somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{32}{n}\right) = 1}$

de plus, pour $n \geq 8$ (q. c) on a l'encadrement : $\boxed{1 \leq u_n \leq 1 + \frac{32}{n}}$.

Donc d'après le th. des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

Exercice III

1. **a.** Retrancher 2 % c'est multiplier par $1 - \frac{2}{100} = 1 - 0,02 = 0,98$.

D'une année sur l'autre on multiplie le nombre de panneaux par 0,98 puis on augment de nombre de panneaux de 250.

b. Avec la calculatrice il suffit de taper 10 560 Entrée puis $\times 0,98 + 50$.

Entrée donne $u_1 \approx 10599$, les appuis successifs de Entrée donnent u_2, u_3, etc.

On obtient $u_{68} \approx 12009$.

le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de 68 ans soit en 2088.

c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while u ⩽ 12000 :
    u = 0,98 * u + 250
    n = n + 1
```

2. *Initialisation* : $u_0 = 10560 \leqslant 12500$: la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 12500$ soit en multipliant par 0,98 :

$0,98u_n \leqslant 0,98 \times 12500$ et en ajoutant 250 à chaque membre :

$0,98u_n + 250 \leqslant 0,98 \times 12500 + 250$ ou $u_{n+1} \leqslant 12250 + 250$ et finalement $u_{n+1} \leqslant 12500$: la proposition est vraie au r ng $n+1$.

La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de la récurrence la proposition $u_n \leqslant 12500$ est vraie pur tout naturel $n \in \mathbb{N}$.

3. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.

Or d'après le résultat précédent :

$u_n \leqslant 12500 \Rightarrow 0,02u_n \leqslant 0,02 \times 12500$ ou encore $0,02u_n \leqslant 250$ ou en ajoutant à chaque membre $-0,02u_n$:

$0 \leqslant 250 - 0,02u_n$; on a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500 : elle est donc convergente vers une limite ℓ, telle que $\ell \leqslant 2500$.

5. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 12500 = 0,98u_n + 250 - 12500$, soit $v_{n+1} = 0,98u_n - 12250 = 0,98u_n - 12250 \times \frac{0,98}{0,98} = 0,98u_n - 12500 \times 0,98 = 0,98(u_n - 12500)$ soit enfin $v_{n+1} = 0,98v_n$: cette relation vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 de premier terme $v_0 = u_0 - 12500 = 10560 - 12500 = -1940$.

b. On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,98^n$, soit $v_n = -1940 \times 0,98^n$.

c. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 12500 \iff u_n = v_n + 12500 = 12500 - 1940 \times 0,98^n$.

d. Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,98^n = 0$, donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12500$

Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.