Exercice I

1) $A = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{15}\right) \times \frac{2}{7}$

$\boxed{A} = \left(\frac{12}{15} - \frac{1}{15}\right) \times \frac{2}{7} = \frac{11}{15} \times \frac{2}{7} = \boxed{\frac{22}{105}}$

$B = -\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \dfrac{\frac{2}{5}+1}{\frac{3}{4} - \frac{11}{5}}$

1

$B = -\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \dfrac{\frac{2}{5}+\frac{5}{5}}{\frac{15}{20} - \frac{44}{20}} = -\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{-29}{20}}$

$B = -\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{7}{5} \times \left(-\frac{20}{29}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{2 \times 7 \times \cancel{5} \times (-4)}{\cancel{5} \times 5 \times 29}$

$\boxed{B} = -\frac{3}{4} - \frac{56}{145} = \frac{-3 \times 145}{4 \times 145} - \frac{56 \times 4}{145 \times 4} = \frac{-435}{580} - \frac{224}{580} = \boxed{\frac{-659}{580}}$

Exercice 2

a) $\frac{2}{3}x - 1 = -\frac{x}{2}$

$\frac{2}{3}x + \frac{x}{2} = 1$

$\frac{4}{6}x + \frac{3x}{6} = 1$

$\frac{7x}{6} = 1$

$7x = 6$

$x = \frac{6}{7}$

$\boxed{S = \left\{\frac{6}{7}\right\}}$

b) $6 - 4x = 5x - 11$

$6 + 11 = 5x + 4x$

$17 = 9x$

$x = \frac{17}{9}$ $\quad S = \left\{\frac{17}{9}\right\}$

c) $2x - 6 = 1 - 1{,}32x$

$2x + 1{,}32x = 1 + 6$

$3{,}32x = 7$

$3{,}32x = 7$

$x = \frac{7}{3{,}32} = \frac{700}{332} = \frac{350}{166} = \frac{175}{83}$

$\boxed{S = \left\{\frac{175}{83}\right\}}$

d) $\frac{x}{2} = \frac{2}{3} + \frac{x}{5} \iff \frac{x}{2} - \frac{x}{5} = \frac{2}{3} \iff \frac{5x}{10} - \frac{2x}{10} = \frac{2}{3} \iff \frac{3x}{10} = \frac{2}{3} \iff 3 \times 3x = 2 \times 10$

$\iff 9x = 20$

$\iff x = \frac{20}{9}$

$\boxed{S = \left\{\frac{20}{9}\right\}}$.

e)

$(2x+3)^2 = (4x+1)(x-5)$

$(2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 20x + x - 5$

$\cancel{4x^2} + 12x + 9 = \cancel{4x^2} - 19x - 5$

$12x + 19x = -5 - 9 = -14$

$31x = -14$; $x = -\frac{14}{31}$. $\quad S = \left\{-\frac{14}{31}\right\}$.

f)

$3(2-6x) - 2(2x-5) = x + 11 + (5x-2)^2 - (5x+6)(5x-8)$

$6 - 18x - 4x + 10 = x + 11 + (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2 - (25x^2 - 40x + 30x - 48)$

$-22x + 16 = x + 11 + \cancel{25x^2} - 20x + 4 - \cancel{25x^2} + 40x - 30x + 48$

$-22x+16 = x+11+\cancel{25x^2}-20x+4-\cancel{25x^2}+40x-30x+48$

$-22x+16 = -9x+63$

$-22x+9x = 63-16 = 47.$

$-13x = 47$

$x = \frac{47}{-13} = -\frac{47}{13}$ $\quad \mathcal{S} = \left\{-\frac{47}{13}\right\}$

g)

$\frac{2x-5}{3} = \frac{1-7x}{4} \iff 4(2x-5) = 3(1-7x)$

$\iff 8x-20 = 3-21x$

$\iff 8x+21x = 3+20$

$\iff 29x = 23 \iff x = \frac{23}{29}$ $\quad \boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{23}{29}\right\}}.$

h)

$x^2 = 18 \iff x^2-18 = 0 \iff x^2-(\sqrt{18})^2 = 0 \iff (x-\sqrt{18})(x+\sqrt{18}) = 0$

$\iff x-\sqrt{18} = 0$ ou $x+\sqrt{18} = 0$

$\iff x = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}$

$\boxed{\mathcal{S} = \{-3\sqrt{2}\,;\ 3\sqrt{2}\}}.$

i)

$(x+4)(x-3)-x^2 = 2-(14-x)$

$\cancel{x^2}-3x+4x-12-\cancel{x^2} = 2-14+x$

$x-12 = x-12$

Cette égalité est vraie pour tout réel x, donc $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}.$

j)

$25x^3-16x = 0$

$x(25x^2-16) = 0$

$x((5x)^2-4^2) = 0$

$x(5x+4)(5x-4) = 0$

Ce qui équivaut à : $x = 0$ ou $5x+4 = 0$ ou $5x-4 = 0$

C'est à dire à : $x = 0$ ou $x = \frac{-4}{5}$ ou $x = \frac{4}{5}$: $\mathcal{S} = \left\{\frac{-4}{5}\,;\ 0\,;\frac{4}{5}\right\}$

k) $\frac{x-4}{2x+5} = 0$ équivaut à : $x-4 = 0$ et $2x+5 \neq 0$, c'est-à-dire à $x = 4$ et $x \neq -2{,}5$.

Or $4 \neq -2{,}5$, donc $\mathcal{S} = \{4\}$

l)

$\frac{6x+1}{x+1} = \frac{5x}{x+2} + \frac{1}{1}$ $\quad \frac{6x+1}{x+1} = \frac{5x}{x+2} + \frac{x+2}{x+2} = \frac{6x+2}{x+2}$

$\frac{6x+1}{x+1} = \frac{6x+2}{x+2}$ équivaut à : $(6x+1)(x+2) = (x+1)(6x+2)$ ET $x+1 \neq 0$ et $x+2 \neq 0$.

$\cancel{6x^2}+12x+x+\cancel{2} = \cancel{6x^2}+2x+6x+\cancel{2}$ ET $x \neq -1$ et $x \neq -2$

$13x = 8x$ ET $x \neq -1$ et $x \neq -2$.

$13x - 8x = 0$ ET $x \neq -1$ et $x \neq -2$.

$5x = 0$

$x = \frac{0}{5} = 0$ ET $x \neq -1$ et $x \neq -2$.

Or $0 \neq -1$ et $0 \neq -2$, donc $\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$.

2)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donc $\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{L}{g}}$, donc $\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2$ (si 2 nombres sont égaux, alors ils ont le même carré).

$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{L}{g}$, donc $\boxed{L = \frac{gT^2}{4\pi^2}}$

$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ donc $r^2 \times F_g = Gm_1m_2$ donc $r^2 = \frac{Gm_1m_2}{F_g}$ et par positivité de r, $r = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{F_g}}$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = m\left(\frac{1}{2}v^2 + gh\right)$, $\boxed{m} = \frac{E}{\frac{v^2}{2}+gh} = \frac{E}{\frac{v^2}{2}+\frac{2gh}{2}} = \boxed{\frac{2E}{v^2+2gh}}$.

Exercice II

A-

Soit x le nombre d'élèves de cette classe :

$\frac{2x}{7}$ font allemand et $\frac{x}{2}$ font espagnol.

On a : $\frac{2x}{7} + \frac{x}{2} + 6 = x$.

Donc : $\frac{4x}{14} + \frac{7x}{14} + 6 = x$

$x = \frac{11x}{14} + 6$

$x - \frac{11x}{14} = 6$

$\frac{14x}{14} - \frac{11x}{14} = 6$

$\frac{3x}{14} = 6$

$3x = 6 \times 14 = 84$; $x = \frac{84}{3} = 28$. $\mathcal{S} = \{28\}$.

La classe compte donc 28 élèves.

B-

1) Soit x et $x+1$ les deux entiers consécutifs.

On veut que : $(x+1)^2 - x^2 = 527$

$$x^2+2x+1-x^2 = 527$$

$$2x+1 = 527$$

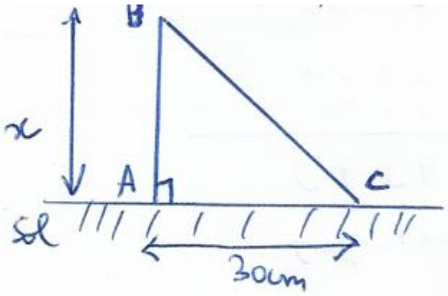
$$2x = 527-1 = 526$$

$$x = \frac{526}{2} = 263$$

$$S = \{263\}$$

Les deux entiers consécutifs ici cherchés sont 263 et 264

C-



Nommons x la longueur AB.

Vu que le bambou mesure $1m = 100cm$

on a : $AB + BC = 100$

$$x + BC = 100$$

$$BC = 100 - x.$$

Le bambou est droit, donc le triangle ABC est rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore appliqué à ce triangle ABC rectangle en A on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$(100-x)^2 = x^2 + 30^2$$

$$100^2 - 2\times100\times x + x^2 = x^2 + 900$$

$$10000 - 200x + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 900$$

$$10000 - 900 = 200x$$

$$200x = 9100$$

$$x = \frac{9100}{200} = \frac{91}{2} = 45{,}5$$

Conclusion : Le bambou s'est donc brisé à 45,5cm du sol.

(*) Rappel : $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ (identité remarquable numéro 2)

Ici, $A = 100$ et $B = x$.

Exercice III

1)

$$\boxed{\frac{16^3}{24^3+16^3+8^3}} = \frac{(2\times 8)^3}{(3\times 8)^3+(2\times 8)^3+8^3} = \frac{2^3\times 8^3}{3^3\times 8^3+2^3\times 8^3+8^3} = \frac{8\times \cancel{8^3}}{\cancel{8^3}\times(3^3+2^3+1)}\ \frac{8}{27+8+1} = \frac{8}{36} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

$$2a)\ \boxed{\frac{x}{6}-\frac{5x-4}{4}} = \frac{2x}{12}-\frac{3(5x-4)}{12} = \frac{2x-3(5x-4)}{12} = \frac{2x-15x+12}{12} = \boxed{\frac{-13x+12}{12}}$$

$$2b)\ \boxed{\frac{x}{x+2}-\frac{x}{x+3}} = \frac{x(x+3)}{(x+2)(x+3)}-\frac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x(x+3)-x(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x^2+3x-x^2-2x}{(x+2)(x+3)} = \boxed{\frac{x}{(x+2)(x+3)}}$$

3) <u>Faux</u> : contrexemple : a =2 et b = 1 : 1/(2+1) = 1/3 tandis que ½ + 1/1 = 3/2 : 1/3 $\neq$3/2 !!!

4) $$4^{15}+8^{10} = (2^2)^{15}+(2^3)^{10} = 2^{30}+2^{30} = 2^{30}\times 2 = 2^{31}$$

Exercice IV

① Pour tout réel $x \neq -1$ et $x \neq 2$

$$\frac{4}{x+1}-\frac{4}{x+2} = \frac{4(x+2)}{(x+1)(x+2)}-\frac{4(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{4(x+2)-4(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{4}{x+1}-\frac{4}{x+2} = \frac{4x+8-4x-4}{(x+1)(x+2)} = \frac{4}{(x+1)(x+2)}.$$

Donc on a bien : $\boxed{\frac{4}{(x+1)(x+2)} = \frac{4}{x+1}-\frac{4}{x+2}}$

② a) <u>développons</u>, pour tout réel x : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = x^2+x+\frac{4}{4} = x^2+x+1.$$

Donc, pour tout réel x, $\boxed{x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$.

b) $x^2+x+1 = \frac{7}{4}$ <u>équivaut donc d'après 2a) à</u> : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}-\frac{7}{4} = 0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1 = 0 \quad \text{car } \frac{3}{4}-\frac{7}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1^2 = 0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}+1\right)\left(x+\frac{1}{2}-1\right) = 0$$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$ qui équivaut à : $x+\frac{3}{2} = 0$ ou $x-\frac{1}{2} = 0$

$x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$ $\quad \boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right\}}$

3) Raisonnons par l'absurde en supposant ABC rectangle (en B nécessairement) :

Alors d'après le théorème de Pythagore, on aurait : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, c'est-à-dire : $11^2 = 8^2+9^2$ et donc : $121 = 64+81$, donc : $121 = 145$: absurde.

Par suite, l'hypothèse formulée est fausse, donc son contraire est vrai, à savoir ABC n'est pas un triangle rectangle.

Exercice V

Vu qu'il dit vrai le Jeudi et Vendredi, sur les sept réponses qu'il va fournir, deux consécutives doivent être identiques !

OR ici, il n'y a aucune réponse consécutive identique sur les six premiers jours.

Cela laisse donc deux alternatives possibles :

1) Le dernier Bob a été prononcé un Jeudi

ou bien 2) Le premier Matt a été prononcé un Vendredi.

1) Si Bob a été prononcé un Jeudi, alors on aurait :

Matt	Bob	Matt	Bob	John	Bob	Bob
Samedi	Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi

OR, le Mardi, il ment, donc il ne s'appellerait pas Bob en contradiction avec la réponse du Jeudi où il dit vrai.

Ainsi, l'alternative (1) n'a pas lieu d'être.

Conclusion : Le premier Matt a été prononcé un Vendredi, donc la réponse va facilement découler :

Matt	Bob	Matt	Bob	John	Bob	MATT
Vendredi	Samedi	Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi

jours consécutifs !

Il répondra donc Matt et on sera un Jeudi !