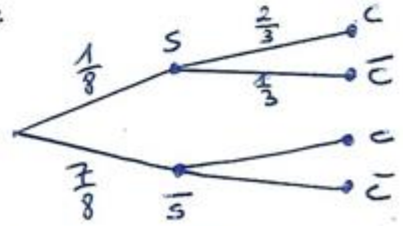
Première Maths Groupe 4 **Corrigé du DM4** **Novembre 2022**

Exercice I

Notons $\begin{cases} S \text{ l'événement : " Avoir des problèmes de santé "} \\ C \text{ l'événement : " Consommer trop de sucres ".} \end{cases}$

Grâce aux données : $P_S(C) = \frac{2}{3}$; $P_C(S) = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ et $P(S) = \frac{1}{8}$.

Faisons un arbre :



On cherche ici la valeur de $P(\bar{S} \cap C)$:

De plus, $P_C(S) = 0{,}8 = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{P(S) \times P_S(C)}{P(C)}$

Donc $P(C) = \frac{P(S) \times P_S(C)}{P_C(S)} = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{12} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{48}$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(C) = \underbrace{P(S \cap C)}_{(*)} + P(S \cap \bar{C})$

Donc : $\frac{5}{48} = \frac{1}{12}^{(*)} + P(S \cap \bar{C})$

Donc : $\boxed{P(S \cap \bar{C})} = \frac{5}{48} - \frac{1}{12} = \frac{5}{48} - \frac{4}{48} = \boxed{\frac{1}{48}}$

Exercice II

$$\frac{x}{x-1} \leqslant \frac{x+6}{2x} \iff \frac{x}{x-1} - \frac{x+6}{2x} \leqslant 0 \iff \frac{2x^2}{2x(x-1)} - \frac{(x-1)(x+6)}{2x(x-1)} \leqslant 0$$

$$\frac{x}{x-1} \leqslant \frac{x+6}{2x} \iff \frac{2x^2 - (x^2+5x-6)}{2x(x-1)} \leqslant 0 \iff \frac{x^2-5x+6}{2x(x-1)} \leqslant 0 \iff \frac{x^2-5x+6}{x(x-1)} \leqslant 0$$

car $2 > 0$.

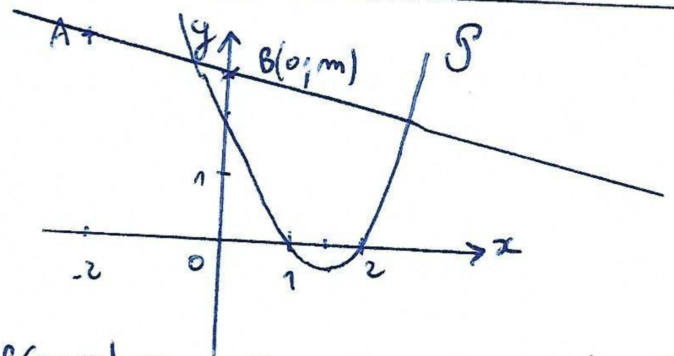
De façon visible 2 et 3 sont racines du trinôme $x^2 - 5x + 6$ et pour ce dernier $a = 1$, donc $a > 0$ de sorte qu'on a le tableau de signes suivant :

Exercice III

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
Signe de x^2-5x+6		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{x^2-5x+6}{x(x-1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\dfrac{x^2-5x+6}{x(x-1)} \leq 0 \iff 0 < x < 1$ ou $2 \leq x \leq 3$: $\boxed{\mathcal{S} =]0;1[\cup [2;3]}$.

Croquis :



① $A(-2;3)$; $B(0;m)$ où $m \in \mathbb{R}$ car B appartient à l'axe des ordonnées.

Soit a le coefficient directeur de (AB) : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{m-3}{0-(-2)} = \dfrac{m-3}{2}$.

(AB) a pour équation réduite : $y = \dfrac{m-3}{2}x + b$.

de plus, $B(0;m) \in (AB)$, donc : $m = \dfrac{m-3}{2} \times 0 + b$, donc $b = m$.

$\boxed{\text{(AB) a pour équation réduite : } y = \dfrac{m-3}{2}x + m}$

Enfin, $M(x;y) \in (AB) \cap \mathcal{P} \iff \begin{cases} y = \dfrac{m-3}{2}x + m \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = \dfrac{m-3}{2}x + m \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$

$M(x;y) \in (AB) \cap \mathcal{P} \overset{2 \times L_1}{\iff} \begin{cases} 2(x^2 - 3x + 2) = 2\left(\dfrac{m-3}{2}x + m\right) \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$

$M(x;y) \in (AB) \cap \mathcal{P} \iff \begin{cases} 2x^2 - 6x + 4 = (m-3)x + 2m \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$ et donc : $2x^2 - 6x + 4 - (m-3)x - 2m = 0$

c'est-à-dire : $2x^2 - (6 + m - 3)x + 4 - 2m = 0$.

Par suite : $\boxed{2x^2+(m+3)x+4-2m=0}$

② Considérons l'équation : $2x^2+(m+3)x+4-2m=0$ (d'inconnue x).

Ici : $a=2$; $b=(m+3)$ et $c=4-2m$.

$\Delta = b^2-4ac = (m+3)^2-4\times2\times(4-2m)$

$\Delta = m^2+6m+9-32+16m$

$\boxed{\Delta = m^2+22m-23}$

Δ est un trinôme de la variable m : $m_1=1$ est une racine évidente de ce dernier.

L'autre racine m_2 vérifie donc : $m_1\times m_2=\frac{c}{a}$ donc $1\times m_2=-\frac{23}{1}$, donc $\underline{m_2=-23}$

de plus $a>0$. donc :

m	$-\infty$		-23		1		$+\infty$
Signe de $\Delta=m^2+22m-23$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : 1) $\underline{\text{Si } m\in]-23;1[}$, alors $\Delta<0$, et $\underline{\mathcal{P} \text{ et } (AB) \text{ n'ont aucun point d'intersection}}$.

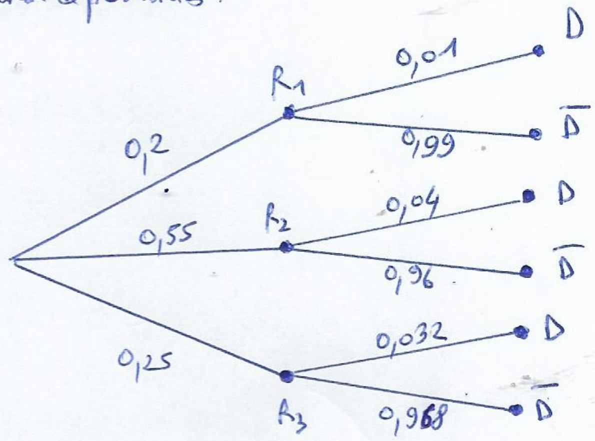
2) $\underline{\text{Si } m=-23 \text{ ou si } m=1}$, alors $\Delta=0$, et $\underline{\mathcal{P} \text{ et } (AB) \text{ ont un unique point d'intersection}}$.

3) $\underline{\text{Si } m\in]-\infty;-23[\cup]1;+\infty[}$, alors $\Delta>0$ et $\underline{\mathcal{P} \text{ et } (AB) \text{ ont deux points d'intersection}}$.

Exercice IV

Faisons un arbre de probabilités :

①



$\underline{P(R_3)} = 1-(P(R_1)+P(R_2)) = 1-(0{,}2+0{,}55) = 1-0{,}75 = \underline{0{,}25}$.

② On cherche ici la valeur de $P(D)$:

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(R_1 \cap D) + P(R_2 \cap D) + P(R_3 \cap D)$$

$$P(D) = 0{,}2 \times 0{,}01 + 0{,}55 \times 0{,}04 + 0{,}25 \times 0{,}032$$

$$\underline{P(D) = 0{,}032}$$

③ $P(R_3 \cap D) = 0{,}25 \times 0{,}032 = 0{,}008$ (q.2) et $P(R_3) \times P(D) = 0{,}25 \times 0{,}032 = 0{,}008$.

Donc $P(R_3 \cap D) = P(R_3) \times P(D)$, donc R_3 et D sont indépendants !

④ $R_1 \cup R_2 = \overline{R_3}$!

Vu que <u>R_3 et D sont indépendants</u> (q.3), d'après le cours, il en est de même <u>pour $\overline{R_3}$ et D</u> !

⑤ $P(R_1 \cap D) = 0{,}2 \times 0{,}01 = 0{,}002$ (arbre).

et $P(R_1) \times P(D) = 0{,}2 \times 0{,}032 = 0{,}0064$.

En particulier, comme $0{,}002 \neq 0{,}0064$, on a : $P(R_1 \cap D) \neq P(R_1) \cdot P(D)$: <u>R_1 et D ne sont pas indépendants</u>.

De façon similaire : $P(R_2 \cap D) = 0{,}55 \times 0{,}04 = 0{,}022$

et $P(R_2) \times P(D) = 0{,}55 \times 0{,}032 = 0{,}0176$.

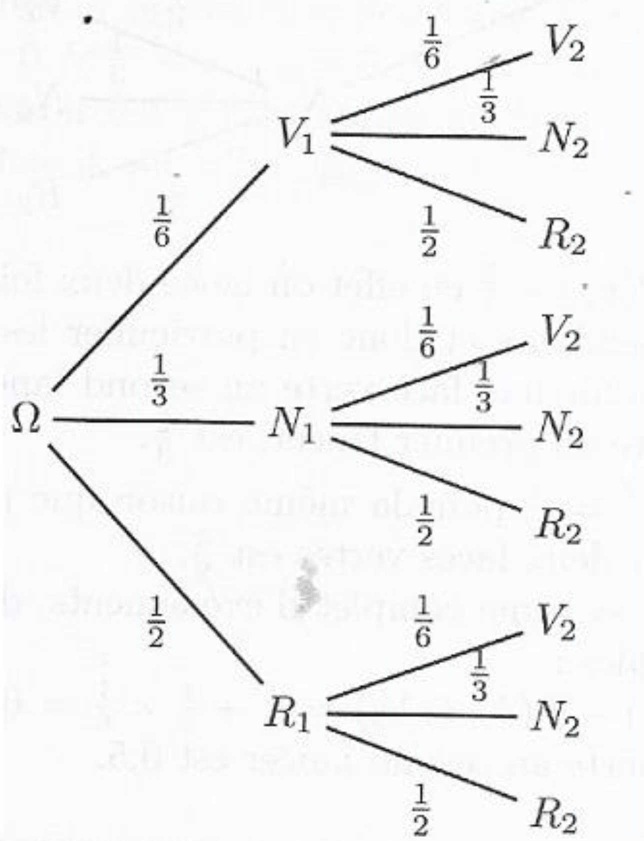
Ainsi, $P(R_2 \cap D) \neq P(R_2) \times P(D)$: <u>R_2 et D ne sont pas indépendants</u>.

Exercice V

Soit $k \in \{1 \; ; \; 2\}$, on considère les événements suivants :

- V_k : « la face obtenue au lancer n°k est verte » ;
- N_k : « la face obtenue au lancer n°k est noire » ;
- R_k : « la face obtenue au lancer n°k est rouge ».

1. La situation peut-être représentée par l'arbre pondéré ci-dessous :



Les deux lancers sont indépendants donc les événements qui sont réalisés successivement le sont aussi, ainsi par exemple $P_{N_1}(V_2) = P(V_2) = \frac{1}{6}$.

2. $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$. La probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires est $\frac{1}{9}$.

3. $C = (V_1 \cap V_2) \cup (N_1 \cap N_2) \cup (R_1 \cap R_2)$ or les événements intervenant dans ces réunions sont deux à deux incompatibles donc $P(C) = P(V_1 \cap V_2) + P(N_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap R_2)$ de plus les expériences aléatoires étant indépendantes on peut écrire $P(C) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{18}$. La probabilité de l'événement C est $\frac{7}{18}$.

4. Notons D l'événement « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de couleurs différentes », alors $D = \overline{C}$, donc $P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$. La probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de couleurs différentes est $\frac{11}{18}$.

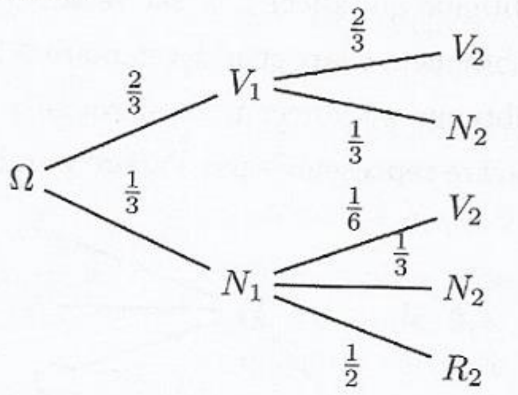
5. $P_C(V_1 \cap V_2) = \frac{P((V_1 \cap V_2) \cap C)}{P(C)} = \frac{P(V_1 \cap V_2)}{P(C)} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{7}{18}} = \frac{1}{14}$. La probabilité qu'à l'issue d'un jeu les deux faces soient vertes sachant qu'elles sont de la même couleur est $\frac{1}{14}$.

✎ $V_1 \cap V_2 \subset C$ donc $(V_1 \cap V_2) \cap C = V_1 \cap V_2$.

Partie B

1.

a. Reprenons les notations de la **Partie A**, la situation peut-être représentée par l'arbre pondéré suivant.



b. $P_{V_1}(V_2) = P(V_2) = \frac{2}{3}$ en effet on lance deux fois le même dé, donc les résultats sont indépendants et donc en particulier les événements V_1 et V_2. La probabilité d'obtenir une face verte au second lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer, est $\frac{2}{3}$.

2. $P(V_1 \cap V_2) = \frac{2}{3}^2 = \frac{4}{9}$ pour la même raison que précédemment, ainsi la probabilité d'obtenir deux faces vertes est $\frac{4}{9}$.

3. $(V_1,\ N_1)$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(N_1 \cap V_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = 0,5$, ainsi la probabilité d'obtenir une face verte au second lancer est 0,5.

<u>Exercice VI</u>

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,05	0,15	0,2
$\overline{B}$	0,05	0,75	0,8
Total	0,1	0,9	1

2. **a.** La probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2 est l'évènement contraire de l'évènement « une paire de verres ne présente aucun des deux défauts », donc sa probabilité est égale $1 - 0,75 = 0,25$. Ou encore $P(A \cup B) = 1 - \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

b. • On a $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0,1 = 0,9$;

• On a $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0,2 = 0,8$.

Donc $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,8 - 0,75 = 0,05$ et

$P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0,9 - 0,75 = 0,15$.

Donc la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts est égale à :

$P(A \cap B) = 1 - P\left(A \cap \overline{B}\right) - P\left(B \cap \overline{A}\right) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0,05 - 0,15 - 0,75 = 0,05.$

c. $P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$ et $P(A \cap B) = 0,05$.

On a donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$: les évènements A et B ne sont pas indépendants.

3. On a $P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0,05 + 0,15 = 0,2$

4. On a $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,05}{0,1} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice VII

1a) $P(B) \neq 0$, donc $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Or $\{A ; \overline{A}\}$ partitionne Ω, donc $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ (union disjointe c'est-à-dire $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ incompatibles).

$P(B) = \underbrace{P(A \cap B)} + \underbrace{P(\overline{A} \cap B)}$

$P(B) = \overbrace{P(A) \times P_A(B)} + \overbrace{P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$ < Ici l'énoncé aurait dû préciser que $P(\overline{A}) \neq 0$).

D'où : $\boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}}$ (relation de Bayes).

1b) Nommons A = " la personne est atteinte de la maladie "

B = " le test est positif ".

on a : $P(A) = x$ et on cherche $P_B(A)$. Grâce à la question précédente, en tenant compte du fait que $P_A(B) = \dfrac{99}{100} = 0,99$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{0,1}{100} = 0,001$ on a : $f(x) = \dfrac{x \times 0,99}{x \times 0,99 + \underbrace{(1-x)}_{P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - x} \times 0,001}$

D'où : $f(x) = \dfrac{0,99x}{0,99x + 0,001 - 0,001x} = \dfrac{0,99x}{0,989x + 0,001}$

Exercice IV

1a) $P(B) \neq 0$, donc $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Or $\{A ; \bar{A}\}$ partitionne Ω, donc $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ (union disjointe c'est-à-dire $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ incompatibles).

$$P(B) = \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A) \times P_A(B)} + \underbrace{P(\bar{A} \cap B)}_{P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)}$$

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$ (Ici l'énoncé aurait dû préciser que $P(\bar{A}) \neq 0$).

D'où : $$\boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)}}$$ (relation de Bayes).

1b) Nommons A = " la personne est atteinte de la maladie "

B = " le test est positif ".

on a : $P(A) = x$ et on cherche $P_B(A)$. Grâce à la question précédente, en tenant compte du fait que $P_A(B) = \dfrac{99}{100} = 0,99$ et $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{0,1}{100} = 0,001$ on a : $f(x) = \dfrac{x \times 0,99}{x \times 0,99 + \underbrace{(1-x)}_{P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - x} \times 0,001}$

d'où : $f(x) = \dfrac{0,99x}{0,99x + 0,001 - 0,001x} = \dfrac{0,99x}{0,989x + 0,001}$

$$\boxed{f(x)} = \dfrac{0,99x \times 1000}{(0,989x + 0,001) \times 1000} = \boxed{\dfrac{990x}{989x + 1}}$$

2a) $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = \dfrac{990x}{989x+1}$: f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec : $\begin{cases} u(x) = 990x \\ u'(x) = 990 \end{cases}$

f est dérivable sur $[0;1]$

Donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $\begin{cases} v(x) = 989x + 1 \\ v'(x) = 989 \end{cases}$

d'où $\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = \dfrac{990(989x+1) - 990x \times 989}{(989x+1)^2}$

$$\boxed{f'(x)} = \dfrac{\cancel{990 \times 989x} + 990 - \cancel{990 \times 989x}}{(989x+1)^2} = \boxed{\dfrac{990}{(989x+1)^2}}.$$

Or $990 > 0$ et $(989x+1)^2 > 0$ (pour tout réel x).

Donc, $\forall x \in [0;1]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0;1]$.

2b) Ici $x = \dfrac{1}{10.000} = 10^{-4}$. Donc $f(x) = f(10^{-4}) = \dfrac{990 \times 10^{-4}}{989 \times 10^{-4} + 1}$

$f(10^{-4}) \approx 0,09$ (soit environ 9 %).

On peut légitimement penser que ce test n'est pas efficace et ne doit pas être commercialisé.

$$\boxed{f(x)} = \frac{0,99x \times 1000}{(0,989x + 0,001)\times 1000} = \boxed{\frac{990x}{989x+1}}$$

2b) Ici $x = \frac{1}{10.000} = 10^{-4}$. Donc $f(x) = f(10^{-4}) = \frac{990 \times 10^{-4}}{980 \times 10^{-4} + 1}$

$\underline{f(10^{-4}) \approx 0,09}$ (soit environ 9 %).

On peut légitimement penser que ce test n'est pas efficace et ne doit pas être commercialisé —

2c) On cherche $x \in [0;1]$ tel que $f(x) \geq 0,99$

$$f(x) \geq 0,99 \iff \frac{990x}{989x+1} \geq 0,99 \iff \frac{990x}{989x+1} \geq \frac{99}{100} \underset{\div 99 \text{ et } 99>0}{\iff} \frac{10x}{989x+1} \geq \frac{1}{100}$$

$$f(x) \geq 0,99 \underset{\substack{\times 100 \\ \text{avec } 100>0}}{\iff} \frac{1000x}{989x+1} \geq 1 \underset{\substack{\text{car} \\ 989x+1>0 \text{ vu que } 0 \leq x \leq 1}}{\iff} 1000x \geq 989x+1 \iff 11x \geq 1 \underset{\text{car } 11>0}{\iff} x \geq \frac{1}{11}$$

Il faudrait donc au minimum $\frac{1}{11}$ de personnes malades dans la population pour que la valeur prédictive du test soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice VIII

En notant G l'événement « Le joueur gagne la voiture » et B celui « Le joueur avait choisi la bonne porte » on a, par la formule de probabilités totales :

$p(G) = p(B \cap G) + p(\bar{B} \cap G) = p_B(G) \times p(B) + p_{\bar{B}}(G) \times p(\bar{B}) = \frac{1}{3}p(B) + \frac{2}{3}p(\bar{B})$.

- Dans la stratégie où le joueur ne change pas de porte, il gagne si et seulement s'il avait choisi initialement la bonne porte :

$p_B(G) = 1$ et $p_{\bar{B}}(G) = 0$, donc $p(G) = \frac{1}{3}$.

- Dans la stratégie où le joueur change de porte, il gagne si et seulement s'il avait choisi initialement la mauvaise porte :

$p_B(G) = 0$ et $p_{\bar{B}}(G) = 1$, donc $p(G) = \frac{2}{3}$.

Le joueur a donc tout intérêt à adopter comme statégie d'ouvrir la porte restante ! Il double ses chances de gain en procédant de la sorte !

Exercice IX

Au total il y a : $2+5+n=n+7$ secteurs sur la roue

① X_n prend pour valeurs : $-10+40=30$€ si la roue s'arrête devant un secteur vert.

$-10+10=0$€ si la roue s'arrête devant un secteur blanc.

-10€ si la roue s'arrête devant un secteur rouge.

Ainsi, $X_n(\Omega)=\{-10;0;30\}$.

Vu que chacun des secteurs a la même probabilité de s'arrêter devant le repère,

$P(X_n=-10)=\frac{n}{n+7}$; $P(X_n=0)=\frac{5}{n+7}$; $P(X_n=30)=\frac{2}{n+7}$.

D'où la loi de probabilité de X_n :

$X_n=x_i$	-10	0	30
$P(X_n=x_i)$	$\frac{n}{n+7}$	$\frac{5}{n+7}$	$\frac{2}{n+7}$

② Le jeu est équitable si et seulement si $E(X_n)=0$.

Or, $E(X_n)=-10\times\frac{n}{n+7}+0\times\frac{5}{n+7}+30\times\frac{2}{n+7}=\frac{-10n}{n+7}+\frac{60}{n+7}=\frac{-10n+60}{n+7}$

$E(X_n)=0 \iff \frac{-10n+60}{n+7}=0 \iff -10n+60=0 \iff 10n=60 \iff n=\frac{60}{10}=6$.

Lorsqu'il y a sur la roue 6 secteurs rouges, ce jeu est équitable.

③ $E(X_n)\leq -2 \iff \frac{-10n+60}{n+7}\leq -2 \iff -10n+60\leq -2(n+7)$ car $n+7>0$ vu que $n\in\mathbb{N}^*$!

$E(X_n)\leq -2 \iff -10n+60\leq -2n-14 \iff -10n+2n\leq -14-60$

$E(X_n)\leq -2 \iff -8n\leq -74 \iff n\geq\frac{-74}{-8}$ (① $-8<0$ donc changement de sens de l'inégalité).

$E(X_n)\leq -2 \iff n\geq 9{,}25$

Or $n\in\mathbb{N}^*$, et $n\geq 9{,}25$ équivaut à $n\geq 10$.

Il faut donc prévoir au minimum 10 cases rouges pour ne pas perdre d'argent.

Exercice X

a) La valeur minimale prise par X est 2 et *p(X=2)* = $0{,}5\times0{,}5=0{,}25$.

b) $X=3$ signifie obtenir deux piles consécutifs pour la 1re fois en position 2 et 3, donc obtenir le tirage $(F;P;P)$. $\boxed{P(X=3)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{8}}$

c) $X=4$ équivaut à : $(P;F;P;P)$
ou $(F;F;P;P)$

Donc $P(X=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\boxed{P(X=4)=\frac{1}{8}.}$

Dans les questions b) et c), on a utilisé le principe multiplicatif associé à une liste d'événements indépendants.

Pour trouver la probabilité que le jeu s' arrête en au plus 4 coups, on calcule :

p(X ≤ 4 *) = p(X = 2) + p(X=3) + p(X=4)* = 0,25 + 0,125 + 0,125 = 0,5 !