Exercice 1

a) Selon l'énoncé, $u_0 = -1$

$u_1 = u_0 + 2\times 0 + 2$

$\boxed{u_1 = 1}$

$u_2 = u_1 + 2\times 1 + 2$

$u_2 = 1 + 2 + 2$

$\boxed{u_2 = 5}$

$u_3 = u_2 + 2\times 2 + 2$

$u_3 = 5 + 4 + 2$

$\boxed{u_3 = 11}$

$u_4 = u_3 + 2\times 3 + 2$

$u_4 = 11 + 6 + 2$

$\boxed{u_4 = 19}$

$v_0 = 0^2 + 0 - 1$

$\boxed{v_0 = -1}$

$v_1 = 1^2 + 1 - 1$

$\boxed{v_1 = 1}$

$v_2 = 2^2 + 2 - 1$

$\boxed{v_2 = 5}$

$v_3 = 3^2 + 3 - 1$

$\boxed{v_3 = 11}$

$v_4 = 4^2 + 4 - 1$

$\boxed{v_4 = 19}$

$v_0 = u_0$; $v_1 = u_1$; $v_2 = u_2$; $v_3 = u_3$; $v_4 = u_4$

Il semblerait que pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V_n soit égal à U_n

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété :
" $U_n = n^2 + n - 1$ "

Initialisation :

Montrons que $P(0)$ est vraie, c'est à dire montrons que $U_0 = 0^2 + 0 - 1$.
Selon l'énoncé, $U_0 = -1$
Et $0^2 + 0 - 1 = -1$ $\quad -1 = -1$
Donc $U_0 = 0^2 + 0 - 1$
Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel arbitrairement fixé. Supposons que pour cet entier, $P(n)$ soit vraie, c'est à dire supposons que U_n soit égal à $n^2 + n - 1$. Montrons alors sous cette hypothèse que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire montrons que $U_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) - 1$

$U_{n+1} = U_n + 2n + 2$ (énoncé)
Selon l'hypothèse de récurrence, $U_n = n^2 + n - 1$
Donc $U_{n+1} = n^2 + n - 1 + 2n + 2$
$U_{n+1} = n^2 + 3n + 1$

~~Et~~ $(n+1)^2+(n+1)-1 = n^2+2n+1+n+1-1$
$= \underline{n^2+3n+1}$

$n^2+3n+1 = n^2+3n+1$
Donc $U_{n+1} = (n+1)^2+(n+1)-1$
Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion

$P(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_n = n^2+n-1}$

Bien

Exercice 2

$\forall n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : "$U_n \geqslant 120$"

Initialisation

Montrons que $P(0)$ est vraie, c'est à dire montrons que $U_0 \geqslant 120$.
D'après l'énoncé, $U_0 = 150$
$150 \geqslant 120$
Donc $U_0 \geqslant 120$
Donc $P(0)$ est vraie

Hérédité

Soit n un entier naturel fixé.

Supposons que pour cet entier, $P(n)$ soit vraie, c'est à dire supposons que $U_n \geq 120$. Montrons alors sous cette hypothèse, que $\cancel{U_{n+1}}$ $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire montrons que $U_{n+1} \geq 120$.

Par hypothèse de récurrence, $U_n \geq 120$.

Donc $0,75\, U_n \geq 0,75 \times 120$ car $0,75 > 0$

Donc $0,75\, U_n + 30 \geq 0,75 \times 120 + 30$

Donc $U_{n+1} \geq 120 \times 0,75 + 30$

$U_{n+1} \geq 120$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

__Conclusion__

$P(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire. Donc selon le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 120$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,75 u_n + 30 - u_n = -0,25 u_n + 30$.

Or, d'après la question a), $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 120$

Donc $-0,25 u_n \leq -0,25 \times 120$ car $-0,25 < 0$

Donc $-0,25 u_n \leq -30$

Donc $\underbrace{-0,25 u_n + 30}_{= u_{n+1} - u_n} \leq 0$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc (u_n) décroît.

Exercice III

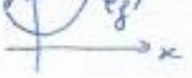
f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 2$.

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2\times 3x^2 - 2\times 2x + 1 = 6x^2 - 4x + 1$.

Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$: $f'(x)$ est une fonction polynôme du second degré avec : $\begin{cases} a = 6 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times 6\times 1 = 16 - 24 = -8$.

$\Delta < 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $a = 6$, à savoir positif, pour tout réel x :



Par suite, f croît sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

2a) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 2$

Pour $n = 0$ on a : $u_{0+1} = f(u_0)$, c'est-à-dire : $u_1 = f(1) = 2\times 1^3 - 2\times 1^2 + 1 - 2 = -1$.

$\boxed{u_1 = -1}$

2b) Soit $S(n)$ la propriété suivante : "$u_{n+1} \leq u_n$" où n est entier naturel.

Initialisation : Pour $n = 0$, établissons que $u_1 \leq u_0$.

Or $u_1 = -1$ (q2a) et $u_0 = 1$ (énoncé), donc comme $-1 \leq 1$, on a bien : $u_1 \leq u_0$: $S(0)$ est vraie

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé.

Supposons que $S(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que : $\underbrace{u_{n+1} \leq u_n}_{\text{hypothèse de récurrence}}$.

Montrons alors que $S(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire prouvons que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

Or, par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} \leq u_n$.

Donc comme f croît sur $\mathbb{R}$ on a : $\underbrace{f(u_{n+1})}_{u_{n+2}} \leq \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}}$ [une fonction croissante préserve le sens des inégalités].

Donc : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

Donc $S(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $S(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S(n)$ est héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence, $S(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n}$.

2c) La phrase encadrée précédente signifie que la suite (u_n) est croissante.

Exercice IV

a)

$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

$u_{0+1} = 2u_0 + 1$, donc $\boxed{u_1} = 2\times 1 + 1 = \boxed{3}$

$u_{1+1} = 2u_1 + 1$, donc $\boxed{u_2} = 2\times 3 + 1 = \boxed{7}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

b) Il semblerait, que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

c) n est entier naturel, et $\mathcal{P}(n)$ désigne la propriété : $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Etape d'initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Etape d'hérédité : Soit n un entier naturel arbitrairement fixé.

Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que : $\underbrace{u_n = 2^{n+1} - 1}_{\textit{hypothèse de récurrence}}$.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire prouvons que : $\underbrace{u_{n+1} = 2^{n+2} - 1}_{\textit{But}}$.

Or d'après la définition de la suite, $u_{n+1} = 2u_n + 1$, et d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = 2^{n+1} - 1$,

de sorte que : $u_{n+1} = 2(2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{n+2} - 1$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Initialisée et héréditaire à tout ordre, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Exercice V

1. Au bout de 30 min, 10 % de 1 mg ont disparu : il en reste donc 0,9 mg et on donne alors 0,25 mg supplémentaires : on a donc $u_1 = 1,15$.
2. Si u_n est la quantité de médicament présente au bout de n périodes de 30 min, à la $(n+1)^e$ période 10 % auront disparu ; il en restera donc $0,9u_n$ et on donne alors 0,25 mg de médicament supplémentaire ; on a donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3. **a.** *Initialisation* Pour $n = 0$. On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,15$ soit $u_0 \leqslant u_1 < 5$:l'encadrement est réalisé au rang 0.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

   Alors en multipliant par 0,9 : $0,9u_n \leqslant 0,9u_{n+1} < 0,9 \times 5$ et en ajoutant 0,25 à chaque membre : $0,9u_n + 0,25 \leqslant 0,9u_{n+1} + 0,25 < 0,9\times 5 + 0,25$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 4,75 < 5$.

   On a donc : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 5$: l'encadrement est vrai au rang $(n+1)$.

   L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, il l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

4. **a.** Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while u < 1.8 :
     u=0.9*u+0.25
     n = n+1
   return n
```

b. Le script renvoie $n = 8$,car $u_8 \approx 1{,}854 > 1{,}8$.
Le médicament est réellement efficace après 4 heures.

5. **a.** On a donc $v_{n+1} = 2{,}5 - u_{n+1} \iff u_{n+1} = 2{,}5 - v_{n+1} = 0{,}9u_n + 0{,}25$.
Or $v_n = 2{,}5 - u_n \iff u_n = 2{,}5 - v_n$; l'égalité précédente devient donc :
$2{,}5 - v_{n+1} = 0{,}9\,(2{,}5 - v_n) + 0{,}25 \iff 2{,}5 - v_{n+1} = 2{,}25 - 0{,}9v_n + 0{,}25 \iff v_{n+1} = 0{,}9v_n$: cette égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme $v_0 = 2{,}5 - u_0 = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$.

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, , $v_n = v_0 \times 0{,}9^n$, soit $v_n = 1{,}5 \times 0{,}9^n$, d'où puisque $u_n = 2{,}5 - v_n$:
Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}9^n$.

c. Non vu que pour tout entier naturel n, $u_n < 2{,}5$: en effet, $1{,}5 > 0$, et $0{,}9^n > 0$, donc $-1{,}5\times0{,}9^n < 0$, et par suite : $2{,}5 - 1{,}5\times0{,}9^n < 2{,}5$, bref $u_n < 2{,}5 < 3$: la quantité de médicament dans le sang sera toujours strictement inférieure à 2,5 mg de produit, donc ne dépassera jamais les 3 mg : le produit ne sera donc pas toxique et ne présente aucun risque pour le patient.

Exercice VI

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $(u^n)' = n u' u^{n-1}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $u^1 = u$, donc $(u^1)' = u'$ et $n u' u^{n-1} \overset{n=1}{=} 1.u'u^{1-1} = u'.u^0 = u'$ car $u^0 = 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé.
Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que : $\overbrace{(u^n)' = n u' u^{n-1}}^{\text{Hypothèse de récurrence}}$.
Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire prouvons que : $(u^{n+1})' = (n+1)u'u^n$

Or, $u^{n+1} = u.u^n$, donc : $(u^{n+1})' = (u.u^n)' = u'.u^n + u.(u^n)'$
dérivée d'un produit de deux fonctions !

Or, par hypothèse de récurrence : $(u^n)' = n u' u^{n-1}$
donc : $(u^{n+1})' = u'.u^n + u.n u' u^{n-1} = u'.u^n + n u' u^n$ car $u.u^{n-1} = u^n$.

Donc $\left(u^{n+1}\right)' = u'u^n(1+n)$ (on a factorisé par $u'u^n$).

Donc $\left(u^{n+1}\right)' = (n+1)u'u^n$, donc $\underline{\mathcal{S}(n+1) \text{ est vraie}}$.

<u>Conclusion</u> : $\mathcal{S}(1)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}(n)$ est héréditaire

donc, d'après le principe de récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(u^n\right)' = n u' u^{n-1}$.

b) <u>Application</u> : Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$: on a : $f = u^n$, donc $f'(x) = n u' u^{n-1} = n \cdot 1 \cdot x^{n-1} = n x^{n-1}$.

<u>Exercice VII</u>

c) $g(x) = x^2 e^{-x^2} = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{-x^2} \\ v'(x) = -2xe^{-x^2} \end{cases}$

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$g'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 \times (-2xe^{-x^2})$

$g'(x) = 2xe^{-x^2}(1-x^2)$

$$\boxed{g'(x) = (-x^2+1) \times 2x \times e^{-x^2}}$$

$h(x) = e^{-x+\sqrt{x^2+1}} = e^{w(x)}$ où $\begin{cases} w(x) = -x + \sqrt{x^2+1} \\ w'(x) = -1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$

$h'(x) = w'(x)e^{w(x)}$

$$\boxed{h'(x) = \left(-1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) e^{-x+\sqrt{x^2+1}}}$$

Car $\left(\sqrt{\varphi}\right)' = \dfrac{\varphi'}{2\sqrt{\varphi}}$.

<u>Exercice VII</u>

a) (U_n) est la suite définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} U_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 10U_n - 18 \end{cases}$.

(V_n) est la suite explicitement définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = 5 \times 10^n + 2$.

b) <u>Conjecture</u> : Pour tout entier naturel n, il semblerait que $U_n = V_n$, c'est à dire que :

$U_n = 5 \times 10^n + 2$.

Soit $\mathcal{S}(n)$ la propriété : " $U_n = (V_n) = 5 \times 10^n + 2$ " où $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$: $U_0 = 7$ énoncé ; $V_0 = 5 \times 10^0 + 2 = 5 \times 1 + 2 = 7$.

Donc $U_0 = V_0$ et $\underline{\mathcal{S}(0) \text{ est vraie}}$.

<u>Hérédité</u> : Soit n un entier naturel fixé tel que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie.

Supposons donc que $\underbrace{U_n = 5 \times 10^n + 2}_{\text{Hypothèse de récurrence}}$, et montrons alors que $U_{n+1} = 5 \times 10^{n+1} + 2$.

Or, $U_{n+1} = 10U_n - 18$ par définition de la suite (U_n).

et par hypothèse de récurrence : $U_n = 5\times10^n+2$, de sorte que :

$$\underline{U_{n+1}} = 10(5\times10^n+2)-18 = 10\times5\times10^n+20-18 = 5\times10\times10^n+20-18 = \underline{5\times10^{n+1}+2}$$

Donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : $\mathcal{S}(0)$ est vraie, et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{S}(n)$ est héréditaire.

donc, d'après <u>le principe de récurrence</u>, on a : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=V_n=5\times10^n+2}$.

La conjecture établie par les élèves est donc vraie.

<u>Exercices pré-post-bac</u>

<u>Exercice VIII</u>

$\mathcal{S}(n)$: $2^n \geq (n+1)^2$.

(on suppose que $2^n \geq (n+1)^2$).

a) Soit $n\geq 2$. Supposons que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie et montrons alors que $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie, c'est à dire montrons que : $2^{n+1} \geq (n+2)^2$.

Or, $2^n \geq (n+1)^2$

Donc $2\times 2^n \geq 2(n+1)^2$ car $2>0$

Donc $2^{n+1} \geq 2(n+1)^2$ $(*)$

Cherchons pour quelles valeurs de n on a : $2(n+1)^2 \geq (n+2)^2$

$2(n+1)^2 \geq (n+2)^2 \iff 2(n^2+2n+1) \geq n^2+4n+4 \iff 2n^2+4n+2-n^2-4n-4 \geq 0$

$2(n+1)^2 \geq (n+2)^2 \iff n^2-2\geq 0 \iff n^2\geq 2 \iff n\geq\sqrt{2}$ car n entier

$\iff n\geq 2$.

Donc vu que $n\geq 2$, on a bien : $2(n+1)^2 \geq (n+2)^2$, de sorte que $(*)$ conduit à : $2^{n+1}\geq (n+2)^2$.

Ainsi, <u>$\mathcal{S}(n+1)$ est vérifiée</u>.

b) Pour $n=0$: $2^0=1$ et $(0+1)^2=1$, donc $P(0)$ est vraie

Pour $n=1$: $2^1=2$ et $(1+1)^2=4$, or $2\geq 4$ est faux, donc $P(1)$ est fausse!

Pour $n=2$: $2^2=4$ et $(2+1)^2=9$, or $4\geq 9$ est faux, donc $P(2)$ est fausse!

Pour $n=3$: $2^3=8$ et $(3+1)^2=16$, or $8\geq 16$ est faux, donc $P(3)$ est fausse.

Pour $n=4$: $2^4=16$ et $(4+1)^2=25$, or $16\geq 25$ est faux, donc $P(4)$ est fausse.

Pour $n=5$: $2^5=32$ et $(5+1)^2=36$; or $32\geq 36$ est faux, donc $P(5)$ est fausse.

Pour $n=6$: $2^6=64$ et $(6+1)^2=49$; or $64\geq 49$ est vraie, donc $P(6)$ est vraie.

De là, comme $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire pour tout entier $n\geq 2$, on déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie uniquement lorsque : $n\geq 6$ ou $n=0$.

c) Bien s'assurer d'initialiser la propriété que l'on veut prouver lors d'un raisonnement

Exercice IX

$f : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $f(n)\geq n$.

Initialisation : Montrons que $f(0)\geq 0$. Or $f(0)\in\mathbb{N}$, donc $f(0)\geq 0$ (0 est le plus petit entier naturel).

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, i.e $f(n)\geq n$.

Prouvons que $f(n+1)\geq n+1$.

Or $n<n+1$ et f croît strictement sur $\mathbb{N}$, donc $f(n)<f(n+1)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $f(n)\geq n$ $\longrightarrow$ donc $n\leq f(n)<f(n+1)$.

Par suite, $f(n+1)>n$ et comme f est à valeurs entières, $f(n+1)\in\mathbb{N}$, donc

$f(n+1)\geq n+1$ (le plus petit entier strictement supérieur à n vaut $n+1$!).

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

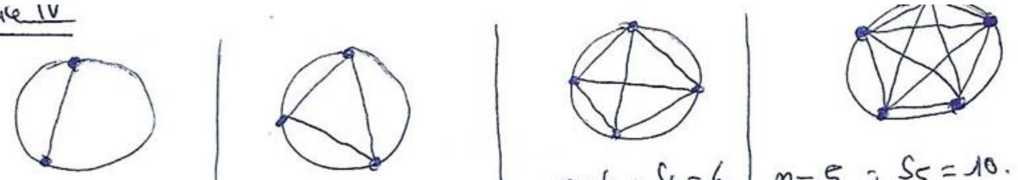
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire. Donc par p^{e} de récurrence on a bien que $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(n)\geq n$.

Pour votre culture, une telle fonction est appelée une EXTRACTRICE.

Exercice X

Exercice IV

1a)



$n=2$; $S_2=1$ | $n=3$; $S_3=3$ | $n=4$; $S_4=6$ | $n=5$; $S_5=10$.

1b) Avec un peu de flair, on pressent que : $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

1c) Soit $\mathcal{S}(n)$ la propriété : $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Initialisation : Pour $n=2$, $S_2=1$ (cf. 1a) et $\frac{2\times(2-1)}{2} = \frac{2\times1}{2} = 1$.

Donc $\mathcal{S}(2)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 2 fixé.

Supposons que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie, à savoir que : $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$ [H.R].

Montrons alors que $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie, c.a.d montrons que : $S_{n+1} = \frac{(n+1)\times n}{2}$.

Considérons un cercle où sont placés $n+1$ points distincts deux à deux.

Prenons en un (on le nomme P) : à partir de ce point, on peut déjà former n cordes en reliant ce dernier à chacun des n points restants sur le cercle.

Pour les n points restants, on peut former S_n cordes (ne contenant pas le point P initial).

Ainsi, $\boxed{S_{n+1} = n + S_n}$.

Or par hypothèse de récurrence, $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$\text{Donc } S_{n+1} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\times\left[2+n-1\right] = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie !

Conclusion : $\mathcal{S}(2)$ est vraie, et pour tout entier $n \geq 2$, $\mathcal{S}(n)$ est héréditaire.

Donc $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 2, \text{ on a : } S_n = \frac{n(n-1)}{2}}$.

A partir de n points placés sur un cercle, on peut donc former $\frac{n(n-1)}{2}$ cordes.

Exercice XI

1) On procède par récurrence. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$:

Initialisation : Pour $n=0$, $\sum_{k=1}^{2^0} \frac{1}{k} = \frac{1}{1}$ et $1+\frac{0}{2}=1$, donc comme $1 \geqslant 1$ est vraie

on a bien $\sum_{k=1}^{2^0} \frac{1}{k} \geqslant 1+\frac{0}{2}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie à savoir que $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1+\frac{n}{2}$.

Montrons que $\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{(n+1)}{2}$.

Or, $\boxed{\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}}$ (*)

Considérons la somme : $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$: cette somme, de termes tous positifs, est composée de $2^{n+1}-(2^n+1)+1$ termes

à savoir $2^{n+1}-2^n = 2^n(2-1) = 2^n$ termes.

Or, $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur $]0;+\infty[$, donc le plus petit terme de cette somme est atteint lorsque $k = 2^{n+1}$.

Par suite, $\forall k \in [\![2^n+1 ; 2^{n+1}]\!]$, on a : $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}$. (cet argument est classique : on minore chacun des termes de la somme par le $\oplus$ petit d'entre eux)

Donc en sommant : $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ ↳ constante en k !

Donc $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2^{n+1}} \times \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} 1$ avec $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} 1 = 1 \times (2^n) = 2^n$ on a vu qu'il y avait 2^n termes dans cette somme là.

Revenons à $(*)$:

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$

et on vient d'établir que $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$.

Donc $\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, c'est à dire $\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n+1}{2}$:

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Donc, par p$^{\text{e}}$ de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2}}$.