

Exercice I

Exercice I

1) $A = \frac{7^{12} \times 7^4}{(7^3)^5} = \frac{7^8}{7^{15}} = 7^{8-15} = 7^{-7}$ $B = \left(\frac{3}{5}\right)^7 \times 5^5 \times 3^{-5} = \frac{3^7 \times 5^5 \times 3^{-5}}{5^7} = \frac{3^2 \times 5^{-7} \times 2^{-2}}{5^7} = 3 \times 5 = 3 \times 5$

$C = 16 \times 2^9 = 2^4 \times 2^9 = 2^{13}$ $D = 3^2 \times \frac{1}{5^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times 5^7$

$E = \frac{27^6 \times 3^7}{9^8} = \frac{(3^3)^6 \times 3^7}{(3^2)^8} = \frac{3^{18} \times 3^7}{3^{16}} = \frac{3^{25}}{3^{16}} = 3^9$

$F = \frac{4^6}{2^4} + \frac{2}{2^{-7}} = \frac{(2^2)^6}{2^4} + \frac{2^1}{2^{-7}} = \frac{2^{12}}{2^4} + 2^{1-(-7)} = 2^{12-4} + 2^8 = 2^8 + 2^8 = 2 \times 2^8 = 2^9$

$G = \frac{(3^4)^7}{2^8 \times 5^{28}} = \frac{3^{28}}{(2 \times 5)^{28}} = \frac{3^{28}}{10^{28}} = \left(\frac{3}{10}\right)^{28}$ $H = \left(\frac{1}{x^{-m}}\right)^3 \times x^{2m+1} = \left(x^{-(-m)}\right)^3 \times x^{2m+1}$

$I = \frac{(2^m)^3 \times x^{2m+1}}{(x^m)^3 \times x^{2m+1}} = x^{3m} \times x^{2m+1} = x^{5m+1}$

2) $E = a^{-14} b^{-6} (ab)^3 = a^{-14} b^{-6} a^3 b^3$

$E = a^{-14} a^3 \times b^{-6} b^3 = a^{-11} b^{-3}$

3) $4^{4m} \times 2^{2m-6} = (2^2)^{4m} \times 2^{2m-6} = 2^{2(4m)} \times 2^{2m-6} = 2^{8-2m} \times 2^{2m-6} = 2^{8-2m+2m-6} = 2^2 = 4$

La valeur de cette expression est égale à 4, quelle que soit la valeur de m.

4) $G = x^2 - 13 = x^2 - (\sqrt{13})^2 = (x + \sqrt{13})(x - \sqrt{13})$

5) $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

6)

$M = \frac{5^{2020} + 5^{2021} + 5^{2022}}{5^{2020}} = \frac{5^{2020}(1 + 5 + 5^2)}{5^{2020}} = 1 + 5 + 5^2 = 31$

Exercice II

2) $300 \times 10^6 \text{ m/s} = 300 \times 10^6 \times 10^{-3} \text{ km/s}$ car $1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km}$.

$300 \times 10^6 \text{ m/s} = 300 \times 10^3 = 3 \times 10^2 \times 10^3 = 3 \times 10^5 \text{ km/s}$.

das une année, approximée à 365 jours, c'est : $365 \times 24 \times 3600$ secondes.

Avec la relation : $D = v \cdot t$, on a : $D = 3 \times 10^5 \times 365 \times 24 \times 3600$, $D \approx 9,46 \times 10^{12} \text{ km}$

1) $A = \frac{2,5 \times (10^{-3})^2 \times 4 \times 10^7}{98 \times 10^{-3}} = \frac{2,5 \times 4 \times 10^{-6} \times 10^7}{98 \times 10^{-3}} = \frac{10 \times 10^{-6} \times 10^7}{98 \times 10^{-3}} = \frac{1}{98} \times 10^{1-6+7+3} = 1,25 \times 10^4$

3) Notons m la masse d'un atome de Carbone : $m = \frac{12}{6,022 \times 10^{23}} \text{ g}$ $m \approx 2 \times 10^{-23} \text{ g}$

4) 802500 est proche de 8×10^5 et 1995874561 est proche de 2×10^9

avec une unité de grandeur de 802500×1995874561 est : $8 \times 10^5 \times 2 \times 10^9 = 16 \times 10^{14} = 1,6 \times 10^{15}$

Exercice III

$$A = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = \boxed{2\sqrt{3}}$$
$$B = \frac{\sqrt{7}}{2-3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}(2+3\sqrt{7})}{(2-3\sqrt{7})(2+3\sqrt{7})} = \frac{2\sqrt{7} + 3 \times 7}{2^2 - (3\sqrt{7})^2} = \frac{2\sqrt{7} + 21}{4 - 9 \times 7} = \frac{21 + 2\sqrt{7}}{4 - 63}$$
$$\boxed{B} = \frac{21 + 2\sqrt{7}}{-59} = \boxed{\frac{-21 - 2\sqrt{7}}{59}}$$

Exercice IV

$m \in \mathbb{N}$ et $A(m) = \frac{9^m + 9^{m+1}}{(3^m)^2}$

a) $\boxed{A(0)} = \frac{9^0 + 9^1}{(3^0)^2} = \frac{1+9}{1^2} = \boxed{10}$ || $\boxed{A(1)} = \frac{9^1 + 9^2}{(3^1)^2} = \frac{9+81}{9} = \frac{90}{9} = \boxed{10}$

$\boxed{A(2)} = \frac{9^2 + 9^3}{(3^2)^2} = \frac{9^2 + 9^3}{9^2} = \frac{9^2}{9^2} + \frac{9^3}{9^2} = 1 + 9 = \boxed{10}$

$\boxed{A(3)} = \frac{9^3 + 9^4}{(3^3)^2} = \frac{9^3 + 9^4}{9^3} = \frac{9^3}{9^3} + \frac{9^4}{9^3} = 1 + 9 = \boxed{10}$

b) Il semblerait que $A(m)$ soit égale à 10, quelle que soit la valeur de l'entier m .

c) $\boxed{A(m)} = \frac{9^m + 9^{m+1}}{(3^m)^2} = \frac{9^m(1+9)}{(3^m)^2} = \frac{9^m \times 10}{9^m} = \boxed{10}$: résultat indépendant de m : la conjecture de b) est donc valide pour tout entier m .

Exercice V

1) $\boxed{A} = \sqrt{147} = \sqrt{7 \times 21} = \sqrt{7 \times 7 \times 3} = \boxed{7\sqrt{3}}$

$\boxed{B} = \sqrt{8} \times \sqrt{56} = \sqrt{8} \times \sqrt{8 \times 7} = \sqrt{8} \times \sqrt{8} \times \sqrt{7} = \boxed{8\sqrt{7}}$

$\boxed{C} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{300} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{100 \times 3} = 3\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = \boxed{9\sqrt{3}}$

2) $\boxed{A} = (1-\sqrt{3})^2 = 1 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = \boxed{4-2\sqrt{3}}$

$$B = (2\sqrt{6} + 5\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{6})^2 + 2 \times 2\sqrt{6} \times 5\sqrt{2} + (5\sqrt{2})^2$$

$$B = 2^2 \times 6^2 + 20 \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{2} + 5^2 \times 2^2$$

$$B = 4 \times 6 + 20 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + 25 \times 2$$

$$\boxed{B} = 24 + 50 + 40\sqrt{3} = \boxed{74 + 40\sqrt{3}}$$

$$C = 7\sqrt{75} - 2\sqrt{48}$$

$$C = 7\sqrt{25 \times 3} - 2\sqrt{16 \times 3}$$

$$C = 7 \times \sqrt{25} \times \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{16} \times \sqrt{3}$$

$$\boxed{C} = 35\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = \boxed{27\sqrt{3}}$$

$$3) AB = \sqrt{200} - \sqrt{98}$$

$$AB = \sqrt{100 \times 2} - \sqrt{49 \times 2}$$

$$\boxed{AB} = 10\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \boxed{3\sqrt{2}}$$

$$BC = \frac{\sqrt{350}}{\sqrt{7}} - \sqrt{8} = \sqrt{\frac{350}{7}} - \sqrt{8} = \sqrt{50} - \sqrt{8}$$

$$\boxed{BC} = \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{4 \times 2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \boxed{3\sqrt{2}}$$

Ainsi, le rectangle ABCD a deux côtés consécutifs de même longueur ($AB = BC = 3\sqrt{2} \text{ cm}$). Donc c'est un carré.

$$4) B = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2$$

$$\boxed{B} = a + 2\sqrt{ab} + b = \boxed{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

$$C = (\sqrt{a} - 3\sqrt{b})^2$$

$$C = \sqrt{a}^2 - 2 \times \sqrt{a} \times 3\sqrt{b} + (3\sqrt{b})^2$$

$$\boxed{C} = a - 6\sqrt{ab} + 9b = \boxed{a + 9b - 6\sqrt{ab}}$$

$$D = (\sqrt{2a} - \sqrt{3b})(\sqrt{2a} + \sqrt{3b})$$

$$\boxed{D} = (\sqrt{2a})^2 - (\sqrt{3b})^2 = \boxed{2a - 3b}$$

$$E = (5a^7 + 2b^3)^2 = (5a^7)^2 + 2 \times 5a^7 \times 2b^3 + (2b^3)^2$$

$$\boxed{E} = \boxed{25a^{14} + 20a^7b^3 + 4b^6}$$

$$5) E = \sqrt{666666^2 - 444444^2 - 222222^2} = \sqrt{(3 \times 222222)^2 - (2 \times 222222)^2 - 222222^2}$$

$$E = \sqrt{3^2 \times 222222^2 - 2^2 \times 222222^2 - 222222^2} = \sqrt{(3^2 - 2^2 - 1) \times 222222^2} = \sqrt{\frac{9-4-1}{4} \times 222222^2}$$

$$\boxed{E} = \sqrt{4} \times \sqrt{222222^2} = 2 \times 222222 = \boxed{444444}$$

Exercice VI

Supposons que B mente : alors son affirmation est fautive, donc son contraire est vrai donc B serait le plus petit.

D qui dit vrai serait lui aussi le plus petit. Contradiction au fait qu'il y a un seul plus petit parmi les quatre.

Conclusion : B dit vrai.

Si C dit vrai : alors A aussi et par suite A, B, C, D seraient vrais : impossible car un ment.

alors C ment (ce serait donc lui le plus grand car le contraire de son affirmation est vrai)

Exercice VII

$$E = \sqrt{\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}}$$

$$E = \sqrt{\frac{(a+\sqrt{b})^2}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}} + \sqrt{\frac{(a-\sqrt{b})^2}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}}$$

$$E = \frac{\sqrt{(a+\sqrt{b})^2}}{\sqrt{a^2-b}} + \frac{\sqrt{(a-\sqrt{b})^2}}{\sqrt{a^2-b}}$$

$$E = \frac{a+\sqrt{b} + a-\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-b}}$$

car $a+\sqrt{b} > 0$ et $a-\sqrt{b} > 0$

$$E = \frac{2a}{\sqrt{a^2-b}}$$

Avec $a=6$ et $b=2$ on obtient le résultat voulu : $\frac{12}{\sqrt{34}} = \frac{12\sqrt{34}}{34} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$