Exercice I

① $g(x) = f(-x)$

donc $g'(x) = -1 \times f'(-x) = -f'(-x)$ rappel : $\left(f(u(x))\right)' = u'(x) \times f'(u(x))$.

$h(x) = f(2x)$

donc $h'(x) = 2 \times f'(2x)$

$k(x) = f(x-2)$

$k'(x) = 1 \times f'(x-2) = f'(x-2)$.

② $f'(-1)$ = coefficient directeur de la droite rouge (tangente à $\mathcal{C}$ en $A(-1;1)$) :

Cette droite passe par $A(-1;1)$ et $B(0;10)$.

donc son coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{10-1}{0-(-1)} = 9$.

Donc $\boxed{f'(-1) = 9}$

De même, $f'(1)$ = coeff. directeur de la droite bleue tangente à $\mathcal{C}$ en $C(1;3)$.

Cette droite passe aussi par $D(2;0)$, donc $f'(1) = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{0-3}{2-1} = \dfrac{-3}{1} = -3$

3) Grâce à 1) et 2) :

$$\begin{cases} g'(-1) = -f'(-(-1)) = -f'(1) = -(-3) = 3 \\ g'(1) = -f'(-1) = -9 \\ h'(0{,}5) = 2 \times f'(2 \times 0{,}5) = 2f'(1) = 2 \times (-3) = -6 \\ k'(1) = f'(1-2) = f'(-1) = 9 \end{cases}$$

Exercice II

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2},$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

$f(x) = e^{-x^2} = e^{u(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = -x^2 \\ u'(x) = -2x \end{cases}$

Donc $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = -2xe^{-x^2}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-2x$.

Ainsi, $\boxed{f'(x) \geqslant 0 \text{ équivaut à } -2x \geqslant 0, \text{ c'est à dire } x \leqslant 0}$ $\rightarrow$ c.a.d $x \in]-\infty;0]$!

Contrairement à ce que je lis encore trop fréquemment dans vos copies, $-2x$ n'est pas une quantité négative pour tout réel x ! Prenez $x=-1$: $-2x = -2\times(-1) = 2$.

Attention à cette erreur tenace !

Ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

$f(0) = e^0 = 1$

2) a) $g(x) = e^{-x^2} - x^2 - 1$ avec $x \in \mathbb{R}$. $g(x) = f(x) - x^2 - 1$ où f est la fonction de la (q-1)

$g'(x) = f'(x) - 2x = -2xe^{-x^2} - 2x = -2xe^{-x^2} - 2x \times 1$

$\boxed{g'(x) \overset{\text{factorisation}}{=} -2x(e^{-x^2} + 1)}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} > 0$, donc $e^{-x^2} + 1 > 1 > 0$. Donc $g'(x)$ a même signe que $-2x$.

Ainsi : $g'(x) \geqslant 0 \iff -2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$.

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

c) Grâce à q.b) g admet pour maximum 0 sur $\mathbb{R}$.

Ainsi (déf. d'un maximum), $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leqslant 0$ c'est à dire : $e^{-x^2} - x^2 - 1 \leqslant 0$

Donc $\boxed{e^{-x^2} \leqslant x^2 + 1}$

Donc $\mathcal{C}$ est située sous la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ et $O(0;0)$ est commun à ces deux courbes.

Exercice III

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2-5x)^4$

$f = u^4$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2-5x \\ u'(x) = 2x-5 \end{cases}$

$f' = 4u'u^3$

donc $\boxed{f'(x) = 4(2x-5)(x^2-5x)^4}$

b) g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{3x^2-1}$

$g = e^u$ où u est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} u(x) = 3x^2-1 \\ u'(x) = 6x \end{cases}$

$g' = u'e^u$ donc $\boxed{g'(x) = 6xe^{3x^2-1}}$

c) $h_1(x) = \sqrt{x^2+4} = \sqrt{u(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2+4 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$

$\boxed{h_1'(x)} = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}$.

$h(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{4x}{h_1(x)} = \dfrac{u(x)}{h_1(x)}$. avec : $\begin{cases} u(x) = 4x \\ u'(x) = 4 \end{cases}$.

$h'(x) = \dfrac{u'(x)h_1(x) - u(x)h_1'(x)}{(h_1(x))^2} = \dfrac{4\sqrt{x^2+4} - 4x \times \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}$ $\dfrac{\dfrac{4\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - 4x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}$

$\boxed{h'(x)} = \dfrac{4(x^2+4) - 4x^2}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \boxed{\dfrac{16}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}}$.

d)

$i(x) = xe^{-x} = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{-x} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$.

$i'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$i'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x}$

$i'(x) = e^{-x}(1-x) = (-x+1)e^{-x}$.

e) $j(x) = e^{\frac{-2x+1}{4x-4}}$.

On pose u définie par : u(x) = $\frac{-2x+1}{4x-4}$, u'(x) = $\frac{-2(4x-4)-4(-2x+1)}{(4x-4)^2} = \frac{4}{(4(x-1))^2} = \frac{4}{4^2(x-1)^2} = \frac{1}{4(x-1)^2}$.

Par suite, j'(x)=u'(x)$e^{u(x)} = \frac{1}{4(x-1)^2} e^{\frac{-2x+1}{4x-4}}$.

2a) $f(x) = xe^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f = uv$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{x^2} \\ v'(x) = 2xe^{x^2} \end{cases}$ $(e^w)' = w'e^w$ (rappel).

$f' = u'v + uv'$, donc $\boxed{f'(x)} = e^{x^2} + x \times 2xe^{x^2} = \boxed{e^{x^2}(1+2x^2)}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} > 0$ et $x^2 \geq 0$, donc $2x^2+1 \geq 1 > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2b) Notons T_A la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse -1 et T_B la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 1.

T_A a pour coefficient directeur $f'(-1) = e(1+2) = 3e$. $(-1)^2 = 1$!

T_B a pour coefficient directeur $f'(1) = e(1+2) = 3e$

<u>T_A et T_B ont le même coefficient directeur, donc $T_A \parallel T_B$</u> : <u>l'affirmation est donc vraie</u>.

<u>Exercice IV</u>

On considère les fonctions f et g définies sur [-1 ; +∞[par

$f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

a) f(0) = 1 et g(0) = 1.

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ donc f'(0) = ½ g'(x) = ½ - x/4 donc g'(0) = ½

Ainsi f(0) = g(0) = 1 et f'(0) = g'(0) = ½

Donc les deux courbes ont la même tangente en x = 0, d'équation y = $\frac{1}{2}$ x + 1 (deux droites passant par un même point et ayant le même coefficient directeur sont confondues).

<u>Exercice V</u>

a) Si la courbe tracée est celle de f, f est convexe sur $\mathbb{R}$ (courbe au-dessus de chacune de ses tangentes).

b) Si la courbe tracée est celle de f' :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		↘		↗	

Par critère du cours, f' décroît sur $]-\infty ; 1]$, donc f est concave sur $]-\infty ; 1]$.

f' croît sur $[1 ; +\infty[$, donc f est convexe sur $[1 ; +\infty[$.

c) Si la courbe tracée est celle de f''. Par lecture graphique de signe :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	

Par critère du cours f'' est à valeurs négatives sur $[-1 ; 3]$ donc f est concave sur $[-1 ; 3]$

f'' est à valeurs positives sur chacun des intervalles $]-\infty ; -1]$ et $[3 ; +\infty[$ donc f est convexe sur chacun de ces intervalles.

Exercice VI

$f_m(x) = 10x^2 e^{mx-1}$

f_m est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$(e^{mx-1})' = m e^{mx-1}$.

$f_m'(x) = 20x e^{mx-1} + 10x^2 \times m e^{mx-1}$ (dérivée d'un produit).

$f_m'(x) = (20x + 10mx^2) e^{mx-1}$

de même : $f_m''(x) = (20 + 20mx) e^{mx-1} + (20x + 10mx^2) \times m e^{mx-1}$

$f_m''(x) = (20 + 20mx + 20mx + 10m^2x^2) e^{mx-1}$

$\boxed{f_m''(x)} = (10m^2x^2 + 40mx + 20) e^{mx-1} = \boxed{10(m^2x^2 + 4mx + 2) e^{mx-1}}.$

$10 > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{mx-1} > 0$, donc $f_m''(x)$ a le même signe que $m^2x^2 + 4mx + 2$ qui est un trinôme en x. (vu que $m \in \mathbb{N}^*$).

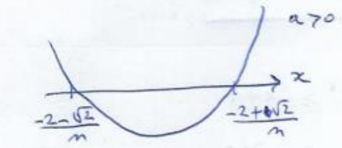
$a = m^2$; $b = 4m$; $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4m)^2 - 4 \times m^2 \times 2 = 16m^2 - 8m^2 = 8m^2$.

$m \in \mathbb{N}^*$, donc $m > 0$, donc $\Delta > 0$ donc ce trinôme a deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4m-\sqrt{8m^2}}{2m^2} = \dfrac{-4m-2\sqrt{2}m}{2m^2} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4m+2\sqrt{2}m}{2m^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2m(2+\sqrt{2})}{2m^2} = \dfrac{-(2+\sqrt{2})}{m} = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{m} \\ x_2 = \dfrac{2m(-2+\sqrt{2})}{2m^2} = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{m} \end{cases}$$



Ainsi, f_m'' s'annule en changeant de signe en $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{m}$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{m}$.

A ce titre, $\mathcal{C}_m$ admet donc deux points d'inflexion en ses points d'abscisses respectives : $\dfrac{-2-\sqrt{2}}{m}$ et $\dfrac{-2+\sqrt{2}}{m}$.

Exercice VII

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 3 - e^x$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 2 - e^x$ et $f''(x) = -e^x$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $-e^x < 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) < 0$.

Ainsi f est concave sur $\mathbb{R}$, et à ce titre, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessous de chacune de ses tangentes.

Exercice VIII

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x} + 3x^4$

a) g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = -e^{-x} + 12x^3$ $(*)$

$$g''(x) = e^{-x} + 36x^2.$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $36x^2 \geq 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) > 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) \geq 0$.

Par critère de convexité du cours, $\boxed{g \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$.

b) Notons A le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 0 : $A(0\,;g(0))$ avec $g(0) = e^0 + 3\times 0^4 = 1$, donc $A(0\,;1)$.
et T_A la tangente à $\mathcal{C}_g$ en A :

T_A a pour équation réduite : $y = g'(0)(x-0) + g(0)$ avec : $g'(0) \overset{(*)}{=} -e^0 + 12\times 0^3 = -1$

$g(0) = 1$

$$y = -x + 1$$

c) Vu que g est convexe sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_g$ est situé AU-DESSUS de chacune de ses tangentes.
En particulier, $\mathcal{C}_g$ est situé au-dessus de T_A, donc :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq -x+1$, c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} + 3x^4 \geq -x+1$

ou encore : $\forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{e^{-x} + 3x^4 + x - 1}_{=\, f(x) \text{ (énoncé !)}} \geq 0$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0, \text{ donc } \mathcal{C}_f \text{ est située au-dessus de l'axe des abscisses.}}$

Exercice IX

$x \in [0\,;+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{k}{1+e^{-r(x-a)}} = k \times \dfrac{1}{1+e^{-r(x-a)}} = k \times \dfrac{1}{v(x)}$

1. avec : $v(x) = 1 + e^{-r(x-a)} = 1 + e^{u(x)}$ où $\begin{cases} u(x) = -r(x-a) \\ u'(x) = -r \end{cases}$

donc $v'(x) = 0 + u'(x)e^{u(x)} = u'(x)e^{u(x)}$

$v'(x) = -re^{-r(x-a)}$

Donc : $\boxed{f'(x)} = k \times \dfrac{(-v'(x))}{v^2(x)} = \dfrac{k \times r e^{-r(x-a)}}{\left(1+e^{-r(x-a)}\right)^2} = \boxed{\dfrac{kr e^{-r(x-a)}}{\left(1+e^{-r(x-a)}\right)^2}}$

Vu que $k>0, r>0$ et que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, il en résulte que $kr e^{-r(x-a)} > 0$ et $\left(1+e^{-r(x-a)}\right)^2 > 0$.

donc, $\boxed{\forall x \in [0\,;+\infty[,\ f'(x) > 0 : f \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[.}$

3. La fonction f' est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f''(x)=\frac{-Kr^2e^{-r(x-a)}\times(1+e^{-r(x-a)})^2-Kr^2e^{-r(x-a)}\times 2(1+e^{-r(x-a)}\times(-re^{-r(x-a)})}{(1+e^{-r(x-a)})^4}$$

$$f''(x)=\frac{-Kr^2e^{-r(x-a)}\times(1+e^{-r(x-a)})+2Kr^2(e^{-r(x-a)})^2}{(1+e^{-r(x-a)})^3}$$

$$f''(x)=\frac{Kr^2e^{-r(x-a)}(-1-e^{-r(x-a)}+2e^{-r(x-a)})}{(1+e^{-r(x-a)})^3}$$

$$f''(x)=\frac{Kr^2e^{-r(x-a)}(e^{-r(x-a)}-1)}{(1+e^{-r(x-a)})^3}$$

Pour tout réel $x \geqslant 0$ $Kr^2e^{-r(x-a)} \geqslant 0$ et $(1+e^{-r(x-a)})^3 > 0$, $f''(x)$ est donc du signe de $e^{-r(x-a)}-1$.

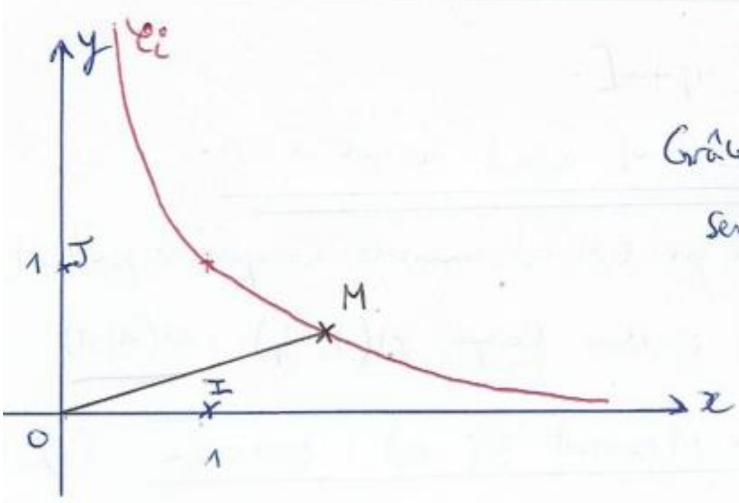
$e^{-r(x-a)}-1 \geqslant 0$ équivaut à $e^{-r(x-a)} \geqslant e^0$, $-r(x-a) \geqslant 0$ ou encore $x-a \leqslant 0$ et $x \leqslant a$.

Ainsi :

x	0		a		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est donc convexe sur l'intervalle $[0\,;a]$ et concave sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$.

Exercice X



Grâce à Geogebra, la distance OM semble être minimale lorsque M(1;1) et vaudrait environ 1,414 unité de longueur.

② Soit x l'abscisse du point M, avec $x > 0$.

Vu que $M \in \mathcal{C}_i$ où $i(x) = \frac{1}{x}$, $M(x\,;\frac{1}{x})$.

Vu que le repère est ORTHONORMÉ, $OM = \sqrt{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2} = \sqrt{x^2 + (\frac{1}{x})^2}$ car $x_0 = y_0 = 0$.

donc $OM = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$

Définissons, sur $]0;+\infty[$, la fonction f par : $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{u(x)}$ où $u(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et que la fonction u est à valeurs strictement positives.

donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ u'(x) = 2x + \left(\frac{-2x}{(x^2)^2}\right) = 2x - \frac{2}{x^3} \end{cases}$

(!) dérivée de $\frac{1}{v}$: $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{2x - \frac{2}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{2x^4 - 2}{2x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{2(x^4 - 1)}{2x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{(x^2)^2 - 1^2}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}$$

Or $x > 0$, donc $x + 1 > 0$, $x^3 > 0$, $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} > 0$ et $x^2 + 1 > 0$.

Donc $f'(x)$ a le même signe que $x - 1$ de sorte que $f'(x) \geq 0$ équivaut à $x - 1 \geq 0$

Donc à $x \geqslant 1$.

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	$\sqrt{2}$	↗	

$f(1) = \sqrt{1^2 + \frac{1}{1^2}} = \sqrt{2}$

f décroît sur $]0;1]$ et croît sur $[1;+\infty[$.

donc f admet un minimum sur $]0;+\infty[$ atteint lorsque $x = 1$.

Comme $OM = f(x)$, il en résulte que OM est minimale lorsque le point M de la courbe $\mathcal{C}_i$ a pour abscisse 1, et donc lorsque $M(1\,;\frac{1}{1})$: $M(1\,;1)$.

La valeur minimale de OM lorsque M parcourt $\mathcal{C}_i$ est : $OM = \sqrt{2}$ (cf. tableau de variation).

Le point $M(1\,;1)$ est donc le point de $\mathcal{C}_i$ à être le plus proche de O.