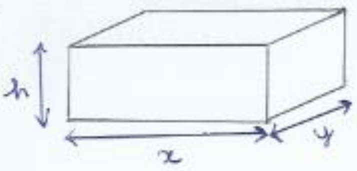
Seconde

Corrigé du DM2

Exercice I

1) $(x-y)^2$ 2) $x^2+\frac{y}{3}$ 3) $xy-(x+y)$ 4) $(x-y)^2+2xy$

4)



Un pavé droit est formé de six rectangles. Les rectangles qui se font face sont identiques. Donc en notant $\mathcal{A}$ l'aire totale de ces six faces, on a :

$\boxed{\mathcal{A}} = 2xy + 2xh + 2hy = \boxed{2(xy+xh+hy)}$.

Exercice II

1) $A = 6(2x-1)+(2x+1)(x-3)$

$A = 12x-6+2x^2-6x+x-3$

$A = 2x^2+7x-9$

$B = (-3x+2)(-x-2)-(x+5)(x-4)$

$B = 3x^2+6x-2x-4-(x^2-4x+5x-20)$

$B = 3x^2+4x-4-(x^2+x-20)$

$B = 3x^2+4x-4-x^2-x+20 = 2x^2+3x+16$

$C = 3(2ab-4ab^2)ab^2 = 3ab^2(2ab-4ab^2) = 3ab^2\times 2ab - 3ab^2\times 4ab^2$

$C = 3\times 2\times a\times a\times b^2\times b - 3\times 4\times a\times a\times b^2\times b^2$

$\boxed{C = 6a^2b^3 - 12a^2b^4}$

$D = (7x-2y)^2 + (3x+4y)^2$

$D = (7x)^2 - 2\times 7x\times 2y + (2y)^2 + (3x)^2 + 2\times 3x\times 4y + (4y)^2 = 49x^2 - 28xy + 4y^2 + 9x^2 + 24xy + 16y^2$

$D = 58x^2 - 4xy + 20y^2$.

2)

E = $2x^2-x = x(2x-1)$ F = $4x-16 = 4(x-4)$ G = $x^2-14x+49 = x^2-2\times x\times 7+7^2 = (x-7)^2$

H = $6x+14+(3x+7)^2$

H = $2(3x+7)+(3x+7)(3x+7)$

H = $(3x+7)(2+3x+7)$

H = $(3x+7)(3x+9) = 3(x+3)(3x+7)$

I = $(3x+5)^2-(x-8)^2$

I = $(3x+5+x-8)(3x+5-(x-8))$

$= (4x-3)(3x+5-x+8) = (4x-3)(2x+13)$

J = $(x-3)^2 - 16 + (x+1)(x+2)$

J = $(x-3)^2 - 4^2 + (x+1)(x+2)$

J = $(x-3+4)(x-3-4) + (x+1)(x+2)$

J = $(x+1)(x-7) + (x+1)(x+2)$

J = $(x+1)(x-7+x+2) = (x+1)(2x-5)$

K = $x^2 - \frac{4}{9}a^2 = x^2 - \left(\frac{2}{3}a\right)^2$

K = $\left(x + \frac{2}{3}a\right)\left(x - \frac{2}{3}a\right)$

L = $10^{n+1} + 10^n = 10^n \times 10 + 10^n \times 1 = 10^n \times (10+1) = 11 \times 10^n$.

M = $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$.

N = $5x(4x-1) + 16x^2 - 1 = 5x(4x-1) + (4x-1)(4x+1) = (4x-1)(5x+4x+1) = (4x-1)(9x+1)$.

2) $(x^2+2)^2 = (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times 2 + 2^2 = x^4 + 4x^2 + 4$.

Grâce à ça : $x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - (2x)^2 = (x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$

Donc $x^4 + 4 = (x^2+2x+2)(x^2 - 2x + 2)$

Exercice III

On peut créer 2023^2 petits carrés de 1cm de côté à partir du grand carré de 2023 cm de côté.

Sur chaque diagonale, il y a 2023 petits carrés noirs coloriés.

Il y a donc $2 \times 2023 - 1$ petits carrés coloriés en noir en tout sur les deux diagonales (attention à ne pas compter deux fois le petit carré central en noir !! voilà pourquoi le - 1 dans la précédente expression).

Le nombre de cases blanches est donc égal à : $2023^2 - (2 \times 2023 - 1) = 2023^2 - 2 \times 2023 + 1 = (2023-1)^2 = 2022^2$.

Exercice IV

a) Si le chiffre des unités de N est égal à 5, alors celui de $N - 5$ vaut 0, donc $N - 5$ est un multiple de 10, donc il existe un entier naturel noté d tel que : $N - 5 = 10d$, et donc $N = 10d + 5$.

Concrètement d représente le nombre de dizaines contenues dans N.

b) $N = 10d + 5$, donc $N^2 = (10d+5)^2 = 100d^2 + 2 \times 10d \times 5 + 5^2 = 100d^2 + 100d + 25$.

Donc $N^2 = 100d(d+1) + 25$. *(on a factorisé $100d^2 + 100d = 100d \times d + 100d \times 1 = 100d(d+1)$).*

De là la façon de procéder de *Matt* est aisée : il cherche mentalement combien de dizaines sont contenues dans N, puis il multiplie ce nombre par son successeur.

Il ajoute deux zéro au résultat obtenu (multiplier par 100) et enfin ajoute 25 à ce dernier résultat.

__Application__ : 95^2

95 contient 9 dizaines ; $9 \times 10 = 90$; $90 \times 100 = 9000$; $9000 + 25 = 9025$ (toutes ces étapes sont mentales).

Donc $95^2 = 9025$

De même pour 165^2 : on fait $16 \times 17 = 272$, puis $272 \times 100 = 27200$ puis $27200 + 25 = 27225$.

__Exercice V__

Les indications portées par les cellules 1 et 3 disent le contraire l'une de l'autre.
Elles ne peuvent donc pas être simultanément vraies toutes les deux ou fausses toutes les deux (car une seule indication est vraie).

Donc l'affirmation 1 ou 3 est vraie, et comme il y a une seule affirmation parmi les trois qui dit vrai, nécessairement, l'affirmation 2 est FAUSSE ; son contraire est donc VRAI, à savoir, $\boxed{\text{Jasmine est dans la cellule 2}}$

Aladin doit ouvrir la porte de la cellule 2.

__Remarque__ : On peut également déduire que l'étiquette de la cellule 3 dit vrai et que celles des cellules 1 et 2 disent faux.

__Exercice VI__

1)

$$\text{Aire}(AMNCD) = \underbrace{\text{Aire}(ABCD)} - \underbrace{\text{Aire}(MBN)}$$

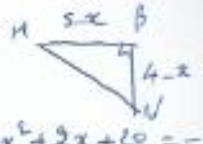
$$\text{Aire}(AMNCD) = 4 \times 5 - \frac{(5-x)(4-x)}{2}$$

$$\text{Aire}(AMNCD) = 20 - \frac{(20-5x-4x+x^2)}{2}$$

$$\text{Aire}(AMNCD) = \frac{40}{2} - \frac{(20-9x+x^2)}{2}$$

$$\text{Aire}(AMNCD) = \frac{40-20+9x-x^2}{2} = \frac{-x^2+9x+20}{2} = -\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{20}{2} = -\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}x+10.$$

(!) Le triangle MBN n'a pas les mêmes dimensions que celui de la figure 1 ! Regardez bien le codage !



2) Le périmètre d'un cercle de rayon R est $2\pi R$.

Notons $\mathcal{P}_p$ le périmètre du petit demi-cercle de diamètre x, et donc de rayon $\frac{x}{2}$:

$$\mathcal{P}_p = \frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{x}{2} = \frac{\pi x}{2}$$

De même, en notant $\mathcal{P}_m$ le périmètre du demi-cercle de diamètre $10-x$:

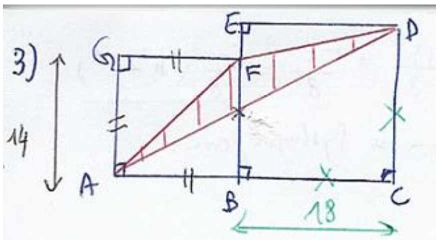
$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \times 2\pi \times \left(\frac{10-x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(10-x)$$

et notant $\mathcal{P}_g$ le périmètre du grand demi cercle de diamètre 10, et de rayon 5 : $\mathcal{P}_g = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 5 = 5\pi$

D'où $\mathcal{P}_{\text{coloré}} = \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}(10-x) + 5\pi = \cancel{\frac{\pi x}{2}} + \frac{\pi}{2} \times 10 - \cancel{\frac{\pi x}{2}} + 5\pi = 5\pi + 5\pi = 10\pi$

Le périmètre de la zone colorée vaut 10π et est donc indépendant de la valeur x.

3)



Aire rouge = Aire du triangle AFD $\overset{\text{Notation}}{=}$ $\mathcal{A}(AFD)$.

Or, $\mathcal{A}(AFD) = \mathcal{A}(ABFG) + \mathcal{A}(BCDE) - \mathcal{A}(AGF) - \mathcal{A}(ACD) - \mathcal{A}(EFD)$

avec :

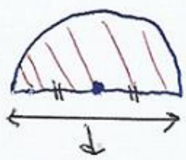
$$\begin{cases} \mathcal{A}(ABFG) = 14^2 = 196 \\ \mathcal{A}(BCDE) = 18^2 = 324 \\ \mathcal{A}(AGF) = \frac{AG \times GE}{2} = \frac{14 \times 14}{2} = \frac{196}{2} = 98 \\ \mathcal{A}(ACD) = \frac{AC \times CD}{2} = \frac{(14+18) \times 18}{2} = \frac{32 \times 18}{2} = 32 \times 9 = 288. \end{cases}$$

$AC = AB + BC = 14 + 18 = 32$ car A, B, C sont aussi alignés.

$$\mathcal{A}(EFD) = \frac{18 \times (18-14)}{2} = \frac{18 \times 4}{2} = 16$$

D'où $\mathcal{A}(AFD) = 196 + 324 - 98 - 288 - 16$

L'aire du triangle colorée est égale à 98 (unités d'aire).

4a) 

Soit R le rayon du disque et d son diamètre : on a : $2R = d$
donc $R = \frac{d}{2}$.

L'aire d'un disque entier de rayon R est : $\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$.
Donc l'aire d'un demi-disque de diamètre d est : $\frac{1}{2} \times \frac{\pi d^2}{4} = \boxed{\frac{\pi d^2}{8}}$

4b) ABC est un triangle rectangle en A, avec $AC = b$ et $AB = c$.
Donc l'aire de ABC est : $\mathcal{A}(ABC) = \frac{AC \times AB}{2} = \frac{bc}{2}$.

Montrons que l'aire des lunules colorées est aussi égale à $\frac{bc}{2}$: Notons $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ l'aire colorée.
Notons $\mathcal{D}a$, $\mathcal{D}b$, $\mathcal{D}c$ chacun des demi disques de diamètre respectif a, b, c.

On a : $\mathcal{A}(\mathcal{L}) = \mathcal{A}(\mathcal{D}b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}c) + \mathcal{A}(ABC) - \mathcal{A}(\mathcal{D}a)$

Etablissons que $\underbrace{\mathcal{A}(\mathcal{D}b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}c) - \mathcal{A}(\mathcal{D}a) = 0}$ et on aura bien : $\mathcal{A}(\mathcal{L}) = \mathcal{A}(ABC)$!

ou encore que : $\mathcal{A}(\mathcal{D}a) = \mathcal{A}(\mathcal{D}b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}c)$

Or, $\mathcal{A}(\mathcal{D}a) = \frac{\pi a^2}{8}$ (*) et $\mathcal{A}(\mathcal{D}b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}c) = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2)$.

Or, le triangle ABC est rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :
$BC^2 = AC^2 + AB^2$

Donc $a^2 = b^2 + c^2$, et d'après (*) on a bien que : $\mathcal{A}(\mathcal{D}a) = \mathcal{A}(\mathcal{D}b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}c)$
↳ et donc $\frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2)$, donc $\frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8}$.

Par suite, $\mathcal{A}(\mathcal{L}) = \underbrace{\mathcal{A}(\mathcal{D}b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}c) - \mathcal{A}(\mathcal{D}a)}_{= 0} + \mathcal{A}(ABC)$

$\boxed{\mathcal{A}(\mathcal{L}) = \mathcal{A}(ABC)}$

4c) Le carré ABCD de 4cm de côté a pour aire $4^2 = 16$ cm².

Une application du théorème de Pythagore permet facilement de déterminer le rayon du cercle dans lequel est inscrit le carré. On trouve après calculs $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm.

A partir de là, on déduit que l'aire extérieure au carrée est égale à : $\pi \times (2\sqrt{2})^2 - 16 = 8\pi - 16$ cm².

$8\pi - 16 \approx 9{,}13$ qui est largement inférieur à 16.

Donc c'est le carré qui a la plus grande aire !

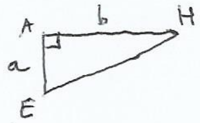
Exercice facultatif

a) $\begin{cases} EB = AB - AE = AB - a \\ FC = BC - BF = BC - a \\ GD = CD - CG = CD - a \\ HA = AD - DH = AD - a \end{cases}$ car A, E, B sont ainsi alignés.

Or $ABCD$ est un carré, donc il a ses quatre côtés de même longueur, donc : $AB = BC = CD = AD$.

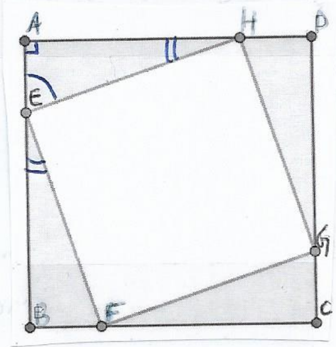
Par suite, $AB - a = BC - a = CD - a = AD - a$, bref : $\boxed{EB = FC = GD = HA}$.

b) Ces quatre triangles rectangles sont tous identiques et ont leurs côtés formant l'angle droit qui mesurent a et b :



c) D'après la question b), on a : $EH = HG = GF = FE$ (= hypoténuse de triangles rectangles identiques).

A ce titre, le quadrilatère $EFGH$ est déjà un losange, vu qu'il a ses quatre côtés de même longueur.



Montrons par exemple que $\widehat{HEF} = 90°$:

$\widehat{AHE} = \widehat{BEF}$ car AEH et BEF sont des triangles identiques (*)

(*) De plus AEH est un triangle rectangle en A donc $\widehat{AEH} + \widehat{AHE} = 90°$.

donc $\widehat{AEH} + \widehat{BEF} = 90°$.

Par suite, comme $\widehat{EAB} = 180°$ et que $\widehat{AEH} + \widehat{HEF} + \widehat{BEF} = \widehat{EAB}$ on a :

$\widehat{HEF} = 180 - (\widehat{AEH} + \widehat{AHE}) = 180 - 90 = 90$

Par suite, $\boxed{EFGH \text{ est un carré}}$, car tout losange ayant un angle droit est un carré.

d) $\boxed{\mathcal{A}(ABCD) = (a+b)^2}$ Car $AB = AE + EB = a + b$

$\mathcal{A}(AEH) = \dfrac{AE \times AH}{2} = \dfrac{ab}{2}$ et donc, grâce à b) $\boxed{\mathcal{A}(AEH) = \mathcal{A}(EBF) = \mathcal{A}(CFG) = \mathcal{A}(HDG) = \frac{ab}{2}}$

e) On "reconstitue" le grand carré $ABCD$:

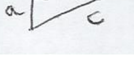
$$\underbrace{\mathcal{A}(ABCD)}_{\text{q. d)}} = \underbrace{\mathcal{A}(EFGH)}_{\text{carré de côté } c} + \underbrace{\mathcal{A}(AEH) + \mathcal{A}(EBF) + \mathcal{A}(CFG) + \mathcal{A}(HDG)}_{4 \times \frac{ab}{2} \text{ d'après q. d)}}$$

$4 \times \frac{ab}{2} = 2ab$

$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$

En développant, il vient que : $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$ et en simplifiant les $2ab$ il vient que :

$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$.



Le théorème de Pythagore est donc justifié.