Exercice I

1) w est impaire sur I, donc $\forall x \in I$, $w(-x) = -w(x)$.
Or $0 \in I$, donc $w(-0) = -w(0)$, donc $w(0) = -w(0)$, donc $2w(0) = 0$
et par suite, $w(0) = 0$.

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, et $f(-x) = 1-(-x)^2 = 1-x^2 = f(x)$
f est donc paire sur $\mathbb{R}$.

b) $g(1) = 5$ et $g(-1) = -3$, donc $g(-1) \neq g(1)$ et $g(-1) \neq -g(1)$, donc g n'est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.

c) Facile, h impaire sur $\mathbb{R}$.
d) Facile, k ni paire ni impaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice II

a) $-3 < 2$ et $(-3)^2 = 9$; $2^2 = 4$, donc comme $9 > 4$, $(-3)^2 > 2^2$.

b) Faux : $1^2 = 1$ et $-1^2 = -1$!

c) Prenons $x = -10$: $-10 \leq 5$ et $(-10)^2 = 100$ avec $100 > 25$!

d) Faux : si $x = 0{,}5$, alors $x^2 = 0{,}25$ et $0{,}5 > 0{,}25$

Exercice III

a) $0 \leq 1{,}99 \leq 1{,}999$, donc par croissance de la fonction carrée sur $[0 ; +\infty[$, on a :
$1{,}99^2 \leq 1{,}999^2$, donc $a^2 \leq b^2$.

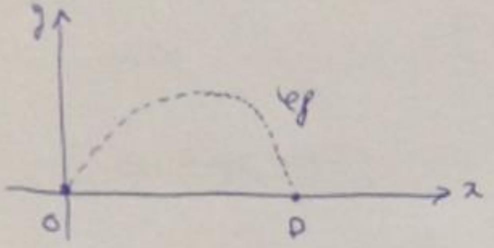
b) $-6 \leq -5 \leq 0$, donc $(-6)^2 \geq (-5)^2$ car $X \mapsto X^2$ décroît sur $]-\infty ; 0]$.
donc $b^2 \geq a^2$.

c) Idem b) : $a^2 \leq b^2$.

d) Idem a) : $0 \leq 0{,}33 \leq \frac{1}{3}$ donc $0{,}33^2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2$ donc $a^2 \leq b^2$.

Exercice IV

Exercice V $f(x) = -3{,}72x^2 + 1{,}43x$.



Le premier nénuphar sur lequel se trouve la grenouille est positionné en $O(0;0)$.

Le second nénuphar correspond au 2^e point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses.

On résout donc $f(x)=0$ pour avoir les coordonnées du point D ($D = 2^{ème}$ nénuphar).

\# on factorise

$f(x)=0 \iff -3{,}72x^2+1{,}43x=0 \iff x(-3{,}72x+1{,}43)=0 \iff \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ou} \\ -3{,}72x+1{,}43=0 \end{array} \right.$

$f(x)=0 \iff \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ou} \\ 3{,}72x=1{,}43 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ou} \\ x=\frac{1{,}43}{3{,}72}=\frac{143}{372} \end{array} \right.$ $\quad S=\left\{0;\frac{143}{372}\right\}$.

Ainsi, $OD = \frac{143}{372} - 0 = \frac{143}{372}$ ($OD \simeq 0{,}384m$). La distance séparant ces deux nénuphars est d'environ $0{,}384m$).

Exercice V

1) $xy=450$, donc $\boxed{y=\frac{450}{x}}$.

$x \geq 10$ d'après l'énoncé, donc $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{10}$ car la fct inverse décroît sur $]0;+\infty[$.

donc : $\frac{450}{x} \leq \frac{450}{10}$ car $10>0$, donc $y \leq 45$.

Par énoncé, $y \geq 10$, donc on a : $\boxed{10 \leq y \leq 45}$.

2) $L = AB+BC+CD = x+3+y+6+x+3 = 2x+12+y \overset{(1)}{=} 2x+12+\frac{450}{x}$.

3)a)

x	10	15	45
$f(x)$	77 ↘	72	↗ 112

b) $f(x)-72 = 2x+12+\frac{450}{x}-72 = 2x-60+\frac{450}{x} = \frac{2x^2-60x+450}{x}$

$f(x)-72 = \frac{2(x^2-30x+225)}{x} = \frac{2(x^2-2\times x\times 15+15^2)}{x} = \frac{2(x-15)^2}{x}$.

IR3

c) $2>0$, $x \geq 10$ et $(x-15)^2 \geq 0$ donc $f(x)-72 \geq 0$ sur $[10;45]$.

De plus, $f(15)=72$, donc $f(x) \geq f(15)$ sur $[10;45]$: f admet donc un minimum sur $[10;45]$ atteint lorsque $x=15$: la clôture a une longueur minimale lorsque $x=15m$ et $y=\frac{450}{15}=30m$ et cette longueur de clôture minimale mesure $72m$.

Exercice Facultatif

a) $0 \leq x \leq 30$, donc $x \in [0 ; 30]$. On pose $I = [0 ; 30]$: $x \in I$.

b) $(BC) \perp (IO)$ et $(OA) \perp (IO)$, donc $(BC) /\!/ (OA)$.

Le théorème de Thalès appliqué aux triangles IBC et IOA donne :

$\frac{IB}{IO} = \frac{BC}{OA}$, donc $\frac{IB}{IB+30} = \frac{10}{20}$, donc $\frac{IB}{IB+30} = \frac{1}{2}$, donc $2IB = IB + 30$

donc $2IB - IB = 30$, c'est à dire $\underline{IB = 30 \text{ cm}}$.

On procède de même dans les triangles IBC et IJK :

$\frac{IB}{IJ} = \frac{BC}{JK}$, donc $\frac{30}{30+x} = \frac{10}{R}$

Par suite, $30R = 10(30+x)$.

Donc $\boxed{R} = \frac{10(30+x)}{30} = \frac{30+x}{3} = \frac{30}{3} + \frac{x}{3} = 10 + \frac{x}{3} = \boxed{\frac{x}{3} + 10}$

c) Pour tout réel x appartenant à I :

$V(x) = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times IJ - \frac{1}{3} \times \pi \times BC^2 \times IB$ avec $\begin{cases} R = \frac{x}{3} + 10 \\ IJ = 30 + x = x + 30 \\ BC = 10 \\ IB = 30 \end{cases}$

$V(x) = \frac{\pi}{3}\left(\underbrace{\left(\frac{x}{3} + 10\right)^2}_{IR\,n°1} \times (x+30) - 10^2 \times 30\right)$

$V(x) = \frac{\pi}{3}\left(\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{x}{3} \times 10 + 10^2\right)(x+30) - 3000\right)$

$V(x) = \frac{\pi}{3}\left(\left(\frac{x^2}{9} + \frac{20x}{3} + 100\right)(x+30) - 3000\right)$

$V(x) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{x^3}{9} + \frac{30x^2}{9} + \frac{20x^2}{3} + 200x + 100x + 3000 - 3000\right)$

$\boxed{V(x)} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{x^3}{9} + \frac{10}{3}x^2 + \frac{20}{3}x^2 + 300x\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}\left(\frac{x^3}{9} + 10x^2 + 300x\right)}$

d) On a $x = \frac{30}{2} = 15$ cm, donc le volume d'eau contenu dans le récipient rempli à mi hauteur est : $V(15) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{15^3}{9} + 10 \times 15^2 + 300 \times 15\right) = \frac{\pi}{3} \times 7125 = 2375\pi$ cm^3.

$\underline{V(15) \approx 7461 \text{ cm}^3}$

Or $\underline{1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ litre}}$ donc $V(15) \approx 7,461$ litres : le récipient contiendra donc plus de **5** litres lorsqu'il est rempli à mi-hauteur.

Complément

0) Pour tout réel R et r, $(R-r)(R^2+Rr+r^2) = R^3+\cancel{R^2r}+\cancel{Rr^2}-\cancel{rR^2}-\cancel{Rr^2}-r^3 = R^3-r^3$.

Donc $\boxed{R^3-r^3 = (R-r)(R^2+Rr+r^2)}$

1a) Appliquons le théorème de Thalès au triangle OBD ((AC)//(BD)).

$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$, donc $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$, donc $\boxed{\frac{H}{H+h} = \frac{r}{R}}$.

1b) $\frac{H}{H+h} = \frac{r}{R} \iff HR = r(H+h) \iff HR = Hr + rh$

$\iff HR - Hr = rh$

$\iff H(R-r) = rh$

$\iff \boxed{H = \frac{rh}{R-r}}$

2a) $V = \frac{\pi R^2(H+h)}{3} - \frac{\pi r^2 H}{3} = \frac{\pi}{3}\left(R^2(H+h) - r^2H\right)$.

$V = \frac{\pi}{3}\left(R^2\left(\frac{rh}{R-r} + h\right) - r^2 \times \frac{rh}{R-r}\right)$.

$V = \frac{\pi}{3}\left(R^2\left(\frac{rh + (R-r)h}{R-r}\right) - \frac{r^3h}{R-r}\right)$

$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R^2(\cancel{rh} + Rh - \cancel{rh})}{R-r} - \frac{r^3h}{R-r}\right)$.

$\boxed{V} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R^3h}{R-r} - \frac{r^3h}{R-r}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}h\left(\frac{R^3}{R-r} - \frac{r^3}{R-r}\right)}$

2b) Grâce à 0), $V = \frac{\pi}{3}h\left(\frac{R^3-r^3}{R-r}\right) = \frac{\pi}{3}h\left(\frac{\cancel{(R-r)}\overbrace{(R^2+Rr+r^2)}^{\text{question 0)}}}{\cancel{(R-r)}}\right)$

$\boxed{V = \frac{\pi}{3}h(R^2+Rr+r^2)}$