Exercice I

1. Dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a les coordonnées suivantes pour les sommets du prisme droit :

$A(0 ; 0 ; 0)$ $B(4 ; 0 ; 0)$ $C(4 ; 4 ; 0)$ $D(0 ; 4 ; 0)$

$E(0 ; 0 ; 8)$ $F(4 ; 0 ; 4)$ $G(4 ; 4 ; 4)$ $H(0 ; 4 ; 8)$

I étant le milieu de [EF], on a $I\left(\dfrac{x_E + x_F}{2} ; \dfrac{y_E + y_F}{2} ; \dfrac{z_E + z_F}{2}\right)$, soit $I(2 ; 0 ; 6)$.

J étant le milieu de [AE], on a de même : $J(0 ; 0 ; 4)$.

2. **a.** Si le plan est nommé (IGJ), cela signifie que les trois points I, G et J définissent le plan, et donc sont non alignés.

On a : $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} x_G - x_I \\ y_G - y_I \\ z_G - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IG} = -1 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IG}$.
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = -1 \times (-2) + 1 \times 0 + 1 \times (-2) = 2 + 0 - 2 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$.

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ) : c'est donc un vecteur normal au plan.

b. Une équation cartésienne d'un plan dont $\vec{n}$ est un vecteur normal est de la forme : $-1 \times x + 1 \times y + 1 \times z + d = 0$, soit $-x + y + z + d = 0$, où d est un réel quelconque.

Comme G est un point du plan (IGJ), on en déduit que la constante d dans ce cas doit être telle que :

$$\begin{aligned} -x_G + y_G + z_G + d = 0 &\iff -4 + 4 + 4 + d = 0 \\ &\iff d = -4 \end{aligned}$$

Une équation de (IGJ) est donc : $-x + y + z - 4 = 0$.

3. Si d est perpendiculaire à (IGJ), alors elle est dirigée par $\vec{n}$, comme elle passe par H, elle admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_H + t x_{\vec{n}} \\ y = y_H + t y_{\vec{n}} \\ z = z_H + t z_{\vec{n}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = -t \\ y = 4 + t \\ z = 8 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

4. Si L est le projeté orthogonal de H sur (IGJ), cela veut dire que la droite (HL) est orthogonale au plan (et passe par H), et donc que la droite (HL) est la droite d. Comme L est un point du plan, c'est donc le seul point de d sur le plan.

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de d soit un point de (IGJ) :

$$\begin{aligned} M_t \in (IGJ) &\iff -x_{M_t} + y_{M_t} + z_{M_t} - 4 = 0 \\ &\iff -(-t) + (4 + t) + (8 + t) - 4 = 0 \\ &\iff 3t + 8 = 0 \\ &\iff t = \frac{-8}{3} \end{aligned}$$

L est donc $M_{\frac{-8}{3}}$ sur la droite d : il a donc comme coordonnées $L\left(-\dfrac{-8}{3} ; 4 + \dfrac{-8}{3} ; 8 + \dfrac{-8}{3}\right)$.

Cela confirme $L\left(\dfrac{8}{3} ; \dfrac{12-8}{3} ; \dfrac{24-8}{3}\right)$

Autrement dit, le point L est bien le point de coordonnées $\left(\dfrac{8}{3} ; \dfrac{4}{3} ; \dfrac{16}{3}\right)$.

5. Par définition, la distance d'un point à un plan est la distance entre le point et son projeté orthogonal sur le plan, donc on cherche HL. Comme on travaille dans un repère orthonormé :

$$\text{HL} = \sqrt{(x_L - x_H)^2 + (y_L - y_H)^2 + (z_L - z_H)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{192}{9}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

La distance de H au plan (IGJ) est donc de $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

6. Calculons : $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IJ} = 2 \times (-2) + 4 \times 0 + (-2) \times (-2) = -4 + 0 + 4 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont donc orthogonaux (et non nuls) donc les droites qu'ils dirigent, (IG) et (IJ) sont orthogonales (et perpendiculaires, car sécantes en I) : le triangle IGJ est donc rectangle en I.

7. Pour calculer le volume, on choisira IGJ comme base (car le triangle étant rectangle, son aire est simple à calculer) et donc la hauteur correspondante est la distance du quatrième sommet (H) au plan (IGJ) (distance qui a été calculée à la question **5.**).

$\text{IG} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\text{IJ} = \sqrt{(-2)^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

L'aire du triangle IGJ est donc : $\mathscr{A}_{IGJ} = \frac{\text{IG} \times \text{IJ}}{2} = \frac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Le volume du tétraèdre est donc : $V = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32}{3}$.

Le volume du tétraèdre est de $V = \frac{32}{3}$ (soit environ 10,7, au dixième près).

Exercice II

47 **1.** Le nombre de choix possibles est $\binom{42}{10} = 1\,471\,442\,973$.

2. a) Le nombre d'équipes qui ne comportent que des filles est $\binom{22}{10} = 646\,646$.

b) Le nombre d'équipes qui comportent un seul garçon est $\binom{22}{9} \times \binom{20}{1} = 9\,948\,400$.

c) Le nombre d'équipes qui comportent autant de garçons que de filles est

$$\binom{22}{5} \times \binom{20}{5} = 408\,282\,336.$$

d) Le seul cas où il y a deux garçons de plus que de filles est six garçons et quatre filles. Le nombre d'équipes de ce type est

$$\binom{22}{4} \times \binom{20}{6} = 283\,529\,400.$$

27 **a)** Il s'agit de dénombrer les couples d'éléments distincts d'un ensemble à 4 éléments.

Le nombre de telles séquences est donc :

$$4 \times 3 = 12.$$

b) AC, AG, AT, CA, CG, CT,
GA, GC, GT, TA, TC, TG

c) Trois nucléotides :
ACG, ACT, AGC, AGT, ATC, ATG,
CAG, CAT, CGA, CGT, CTA, CTG
GAC, GAT, GCA, GCT, GTA, GTC
TAC, TAG, TCA, TCG, TGA, TGC
Quatre nucléotides :
ACGT, ACTG, AGCT, AGTC, ATCG, ATGC,
CAGT, CATG, CGAT, CGTA, CTAG, CTGA
GACT, GATC, GCAT, GCTA, GTAC, GTCA
TACG, TAGC, TCAG, TCGA, TGAC, TGCA

33 **a)** Il s'agit de déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à 12 éléments.
Ce nombre est $12! = 479\,001\,600$.

b) Le nombre de façons de ranger, tout d'abord, les copies des 7 filles, est $7!$. Pour chacune de ces façons de les ranger, il y a $5!$ façons de ranger les copies des 5 garçons. Le nombre total de telles façons de ranger les 12 copies est donc $7! \times 5! = 604\,800$.

c) Si on commence par les copies des garçons, le nombre de façons de ranger les 12 copies est $5! \times 7!$, ce qui donne le même résultat qu'à la question précédente.

41 **1. a)** On assimile un comité à une combinaison de trois éléments parmi 36. Le nombre de tels comités est donc $\binom{36}{3} = 7\,140$.

b) Pour qu'il y ait davantage de filles que de garçons, il faut qu'il y ait trois filles et pas de garçons ou bien deux filles et un garçon.

Le nombre de comités constitués de trois filles est $\binom{20}{3} = 1140$. Le nombre de comités constitué de deux filles et un garçon est $\binom{20}{2} \times \binom{16}{1} = 190 \times 16$ $= 3\,040$.Le nombre total de comités avec davantage de filles que de garçons est donc $1140 + 3\,040 = 4\,180$.

2. a) Dans ce cas, l'ordre est important, mais il ne peut pas y avoir de répétitions (une personne ne peut pas occuper deux postes). Le nombre de tels comités est donc $36 \times 35 \times 34 = 42\,840$.

b) Le nombre de comités de trois filles est alors $20 \times 19 \times 18 = 6\,840$.

Pour les comités de deux filles et un garçon, il y d'abord 3 choix pour le poste occupé par le garçon. Pour chacun de ces choix, on a le choix entre 20 garçons, ce qui fait 60 possibilités.

Pour chacune de ces possibilités, le nombre de façons de choisir les filles est $20 \times 19 = 380$, ce qui donne en tout $60 \times 380 = 22\,800$ comités de ce type.

Le nombre total de comités avec davantage de filles que de garçons est donc $6\,840 + 22\,800 = 29\,640$.

70 **a)** Le nombre de tirages possibles est $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1(2n-2)\dots(n+1)}{n!}$.

b) S'il y a exactement p boules blanches, alors il y exactement n - p boules rouges.

Le nombre de tirages de ce type est donc $\binom{n}{p} \times \binom{n}{n-p}$.

Or par symétrie des nombres de combinaisons, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

Donc le nombre de tirages avec p boules blanches est $\binom{n}{p}^2$.

c) Un tirage peut comporter entre 0 et n boules blanches.

Donc la somme $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$ est égale au nombre total de tirages, c'est-à-dire $\binom{2n}{n}$.

72 Le nombre de façons de constituer le groupe A est le nombre de combinaisons de 16 éléments parmi 32 : $\binom{32}{16} = 601\,080\,390$.

Le nombre de groupes possibles qui comportent exactement autant de filles que de garçons est $\binom{20}{8} \times \binom{12}{8} = 62\,355\,150$. Ce n'est pas la moitié du nombre total de groupes possibles, donc Marina a tort.

84 Il y a quatre façons de placer la lettre N. Pour chacune de ces façons, il faut ordonner trois lettres parmi les six autres lettres du mot MOULINS. Le nombre de façons de faire cela est $6 \times 5 \times 4 = 120$. Donc le nombre de mots vérifiant cette contrainte est $120 \times 4 = 480$.

Exercice III

45 **1.** Une main est une combinaison de cinq cartes parmi 52. Le nombre total de mains est donc $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

2. a) Une couleur en cœur est une combinaison de cinq cartes parmi les 13 cartes de cœur. Le nombre de mains de ce type est $\binom{13}{5} = 1\,287$.

b) Il y a quatre familles donc le nombre total de « couleurs » est $1\,287 \times 4 = 5\,148$.

3. a) Pour un carré de 10, la cinquième carte peut être n'importe laquelle des 48 cartes restantes.

Il y a donc 48 mains de ce type.

b) Il y a 13 possibilités pour la carte qui sera répétée quatre fois dans le carré, et dans chacun de ces cas 48 possibilités pour la cinquième carte. Le nombre total de carrés est donc $13 \times 48 = 624$.

4)

La quinte flush

– Avec un jeu de 52 cartes : il faut choisir la figure du début 10 choix (de l'as au 10) et la couleur, 4 choix. On a donc :

$$10 \times 4 = 40 \quad \text{combinaisons}$$

Pour la probabilité d'avoir une quinte flush dans une main de 5 cartes, on divise le résultat précédent par le nombre total de mains de 5 cartes, soit 2598960, on trouve de l'ordre de 0,0015 %.

5)

Le full

– Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure des trois cartes identiques soit 13 choix puis on en choisit 3 parmi les 4 puis on choisit la figure des deux cartes identiques soit 12 choix puis on en choisit 2 parmi les 4, on a donc :

$$13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2} = 13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3\ 744 \quad \text{combinaisons}$$

Pour la probabilité d'avoir un full entre les mains est 3744/2598960 soit environ 0,0014 ou 0,14 %.

6)

Le brelan

– Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure des trois cartes identiques soit 13 choix puis on en choisit 3 parmi les 4 enfin on prend 2 autres cartes dans les 48 restantes sans oublier d'enlever les fulls :

$$13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{2} - 3744 = 13 \times 4 \times 1128 - 3744 = 54\ 912 \quad \text{combinaisons}$$

Pour la probabilité d'avoir un brelan dans une main on divise le résultat précédent par le nombre total de mains de 5 cartes, soit 2598960, on trouve de l'ordre de 2,1 %.

7)

La double paires

– Avec un jeu de 52 cartes : On choisit les deux jeux de paires parmi les 13 figures, puis on choisit deux fois deux cartes parmi ces deux jeux et enfin une carte parmi les 44 restante, on a donc :

$$\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{44}{1} = 78 \times 6^2 \times 44 = 123\ 552 \quad \text{combinaisons}$$

La probabilité d'avoir une double paire est 123552/2598960 soit environ 0,048 ou 4,8 %.

Exercice IV

1) a) D_1 est le nombre de dérangements de E lorsque E est un ensemble de cardinal 1.
Donc E est un singleton, il a un unique élément : $E = \{x_1\}$ Bien
Il y a donc $1! = 1$ permutation des éléments de E qui est définie par $\sigma(x_1) = x_1$. L'unique élément de E est donc forcément un point fixe.
Ainsi il n'existe aucune permutation de E n'ayant aucun point fixe donc aucun dérangement de E : $\underline{D_1 = 0}$ Bien

b) $E = \{x_1 ; x_2\}$; $card(E) = 2$, donc il y a $2! = 2$ permutations
$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ et $\sigma' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ donc $\underline{D_2 = 1}$

c) $E = \{x_1 ; x_2 ; x_3\}$; $card(E) = 3$, donc il y a $3! = 6$ permutations
$\sigma(E) = \{(x_1;x_2;x_3) ; (x_1;x_3;x_2) ; (x_2;x_1;x_3) ; (x_2;x_3;x_1) ; (x_3;x_1;x_2) ; (x_3;x_2;x_1)\}$
donc $\underline{D_3 = 2}$ Oui

2) a) u_k = nombre de permutation de E ayant k points fixes $(0 \leq k \leq n)$
Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes. Une fois ces choix effectués, la permutation des $n-k$ éléments restants est une permutation sans point fixe, soit D_{n-k} dérangements possibles.
Bien
Très Bien
Donc le nombre de permutation ayant k points fixes noté u_k vaut $\binom{n}{k} \times D_{n-k}$
$\boxed{u_k = \binom{n}{k} \times D_{n-k}}$ Oui

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \underline{n!}$ (nombre de permutations au total)

c) • $\underline{n = 4}$ $\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \times D_{4-k} = 4!$
$\binom{4}{0}D_4 + \binom{4}{1}D_3 + \binom{4}{2}D_2 + \binom{4}{3}D_1 + \binom{4}{4}D_0 = 24$
$\Leftrightarrow \underline{D_4} = 24 - 4D_3 - 6D_2 - 4D_1 - D_0 = 24 - 8 - 6 - 0 - 1 = \underline{9}$ Bien

• $\underline{n = 5}$ $D_5 = 5! - \binom{5}{1}D_4 - \binom{5}{2}D_3 - \binom{5}{3}D_2 - \binom{5}{4}D_1 - \binom{5}{5}D_0$
$D_5 = 120 - 5D_4 - 10D_3 - 10D_2 - 5D_1 - D_0 = 120 - 45 - 20 - 10 - 1 = \underline{44}$ Oui

• $\underline{n = 6}$ $D_6 = 6! - \binom{6}{1}D_5 - \binom{6}{2}D_4 - \binom{6}{3}D_3 - \binom{6}{4}D_2 - \binom{6}{5}D_1 - \binom{6}{6}D_0$

• $D_7 = !7 = 1854$ Précisez votre notation... • $D_9 = !9 = 133\,496$

• $D_8 = !8 = 14\,833$ • $D_{10} = !10 = 1\,334\,961$

3) • Il y a D_{10} possibilités qu'aucune des personnes ne reparte avec son chapeau et il y a $10!$ possibilités de permutations Oui

$$p_1 = \frac{D_{10}}{10!} = \frac{!10}{10!} = \frac{1\,334\,961}{3\,628\,800} \simeq 0,37 \simeq 37\,\%$$ Oui

La probabilité qu'aucune des personnes ne reparte avec le chapeau avec lequel elle était arrivée est de 0,37 Bien

• L'évènement contraire de "au moins une des personnes repart avec le chapeau avec lequel elle était arrivée" est celui défini précédemment. Oui

$$p_2 = 1 - \frac{D_{10}}{10!} = 1 - \frac{1\,334\,961}{3\,628\,800} \simeq 0,63 \simeq 63\,\%$$

• La probabilité qu'il y ait au moins une personne est 1,7 fois plus importante que celle qu'il n'y ait personne Oui

Exercice VI

a) $p \geq 1$.

Soit $n, n+1, \dots, n+p-1$ p entiers consécutifs.

et $K = n(n+1)\cdots(n+p-1)$: $(K \in \mathbb{N})$

Si $n=0$, $K=0$ est évidemment divisible par $p!$

Si $n \geqslant 1$, $K = \dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!}$. Or $\dbinom{n+p-1}{n-1} = \dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,(n+p-1-(n-1))!}$

$$\binom{n+p-1}{n-1} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!}$$

donc $\dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!} = p! \dbinom{n+p-1}{n-1}$

$K = p! \dbinom{n+p-1}{n-1}$. Vu que $\dbinom{n+p-1}{n-1} \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}$ et $p! \in \mathbb{N}^*$

on a que $p!$ divise K.

b) Piochons simultanément p entiers naturels pris dans $[\![1;n]\!]$: Il y a $\binom{n}{p}$ façons de faire.

Ensuite, on ordonne par ordre croissant les p entiers obtenus : une seule façon de procéder.
↳ (les 2 ≠, d'où <).

Donc le cardinal de l'ensemble cherché est $\binom{n}{p}\times 1 = \underline{\binom{n}{p}}$.

c) $u_n = \binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!^2}$

$$u_{n+1} = \binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}$$

Ainsi $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2}$$

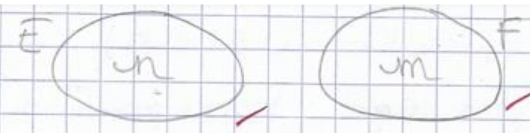
$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2\cancel{(n+1)}(2n+1)}{\cancel{(n+1)}(n+1)} = \boxed{\frac{4n+2}{n+1}}$$

Pour $n>0$: $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n\left(4+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Par limite de référence, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par limites de somme, produit et quotient

on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4}$.

Exercice VII



$card(E) = n$; $card(F) = m$

$card(E \cup F) = card(E) + card(F)$

$= n + m$

- $\binom{n+m}{r}$ est le nombre de combinaisons de r éléments (le nombre de sous-ensemble de cardinal r) parmi la réunion des ensembles disjoints E et F de cardinal $n+m$ Oui.
- Parmi ces combinaisons, on peut dénombrer celles qui possèdent :

  - 0 élément de E et r éléments de F soit $\binom{n}{0}\binom{m}{r}$ Oui
  - 1 élément de E et $r-1$ éléments de F soit $\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}$

  ⋮

  - r élément de E et 0 éléments de F soit $\binom{n}{r}\binom{m}{0}$

En généralisant, union disjointe... pour tout entier r tel que $0 \leqslant r \leqslant n+m$ on a bien

$$\boxed{\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}}$$

Bien

Exercice VIII

82 **1. a)** Il y a une seule partition de cet ensemble en une partie, c'est l'ensemble lui-même. Ainsi $S_2^1 = 1$.

Il y a une seule partition de cet ensemble en deux parties : $\{a\}$ et $\{b\}$. Ainsi $S_2^2 = 1$.

b) Voici les trois partitions de cet ensemble en 2 parties :

$\{a\}$ et $\{b\,;c\}$, $\{b\}$ et $\{a\,;c\}$, $\{c\}$ et $\{a\,;b\}$.

c) Il y a une seule partition de E en une partie, donc $S_3^1 = 1$.

On a vu qu'il y a trois partitions de E en deux parties, donc $S_3^2 = 3$.

Il y a une seule partition de E en trois parties : $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c\}$. Donc $S_3^3 = 1$.

d) Pour tout entier naturel n, il y a une unique partition de E en une partie, c'est l'ensemble E lui-même, et une unique partition de E en n parties, celle constituée de n parties à 1 élément.

Donc pour tout entier naturel n, $S_n^1 = 1$ et $S_n^n = 1$.

2. a) La notation S_4^2 représente le nombre de partitions d'un ensemble à 4 éléments en deux parties.

Prenons par exemple l'ensemble $E = \{a ; b ; c ; d\}$.

Voici ses partitions en deux parties :

$\{a\}$ et $\{b ; c ; d\}$

$\{b\}$ et $\{a ; c ; d\}$

$\{c\}$ et $\{a ; b ; d\}$

$\{d\}$ et $\{a ; b ; c\}$

$\{a ; b\}$ et $\{c ; d\}$

$\{a ; c\}$ et $\{b ; d\}$

$\{a ; d\}$ et $\{b ; c\}$

Ainsi, $S_4^2 = 7$.

b) Voici les partitions de $E = \{a ; b ; c ; d\}$ en trois parties :

$\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c ; d\}$

$\{a\}$, $\{c\}$ et $\{b ; d\}$

$\{a\}$, $\{d\}$ et $\{b ; c\}$

$\{b\}$, $\{c\}$ et $\{a ; d\}$

$\{b\}$, $\{d\}$ et $\{a ; c\}$

$\{c\}$, $\{d\}$ et $\{a ; b\}$

Ainsi, $S_4^3 = 6$.

On pose $F = \{a ; b ; c ; d ; e\}$

Voici les partitions de F en trois parti

$\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c\,;d\,;e\}$

$\{a\}$, $\{c\}$ et $\{b\,;d\,;e\}$

$\{a\}$, $\{d\}$ et $\{b\,;c\,;e\}$

$\{a\}$, $\{e\}$ et $\{b\,;c\,;d\}$

$\{b\}$, $\{c\}$ et $\{a\,;d\,;e\}$

$\{b\}$, $\{d\}$ et $\{a\,;c\,;e\}$

$\{b\}$, $\{e\}$ et $\{a\,;c\,;d\}$

$\{c\}$, $\{d\}$ et $\{a\,;b\,;e\}$

$\{c\}$, $\{e\}$ et $\{a\,;b\,;d\}$

$\{d\}$, $\{e\}$ et $\{a\,;b\,;c\}$

$\{a\,;b\}$, $\{c\,;d\}$ et $\{e\}$

$\{a\,;b\}$, $\{c\,;e\}$ et $\{d\}$

$\{a\,;b\}$, $\{d\,;e\}$ et $\{c\}$

$\{a\,;c\}$, $\{b\,;d\}$ et $\{e\}$

$\{a\,;c\}$, $\{b\,;e\}$ et $\{d\}$

$\{a\,;c\}$, $\{d\,;e\}$ et $\{b\}$

$\{a\,;d\}$, $\{b\,;c\}$ et $\{e\}$

$\{a\,;d\}$, $\{b\,;e\}$ et $\{c\}$

$\{a\,;d\}$, $\{c\,;e\}$ et $\{b\}$

$\{a\,;e\}$, $\{b\,;c\}$ et $\{e\}$

$\{a\,;e\}$, $\{b\,;e\}$ et $\{c\}$

$\{a\,;e\}$, $\{c\,;e\}$ et $\{b\}$

$\{b\,;c\}$, $\{d\,;e\}$ et $\{a\}$

$\{b\,;d\}$, $\{c\,;e\}$ et $\{a\}$

$\{b\,;e\}$, $\{c\,;d\}$ et $\{a\}$

Ainsi, $S_5^3 = 25$.

c) $S_4^2 = 7$ et $S_3^1 + 2S_3^2 = 1 + 2 \times 3 = 7$

donc $S_4^2 = S_3^1 + 2S_3^2$.

$S_4^3 = 6$ et $S_3^2 + 3S_3^3 = 3 + 3 \times 1 = 6$

donc $S_4^3 = S_3^2 + 3S_3^3$.

d) On conjecture que $S_5^3 = S_4^2 + 3S_4^3$.

$S_5^3 = 25$ et $S_4^2 + 3S_4^3 = 7 + 3 \times 6 = 25$ donc cette relation est vraie.

e) On peut conjecturer que, pour tous nombres entiers naturels non nuls n et p, avec $p \leqslant n$, $S_n^p = S_{n-1}^{p-1} + pS_{n-1}^p$.

3. a) Si une des parties est $\{x\}$, alors les $p - 1$ autres parties forment une partition d'un ensemble à $n - 1$ éléments.

Le nombre de telles partitions de E est donc S_{n-1}^{p-1}.

b) Si aucune des parties n'est $\{x\}$, alors il faut que les p parties constituent une partition de l'ensemble des $n - 1$ autres éléments. Le nombre de telles partitions est S_{n-1}^p. Puis, il faut choisir dans laquelle de ces p parties on met l'élément x – il y a p façons de faire ce choix.

Le nombre total de telles partitions est donc pS_{n-1}^p.

c) Les partitions de l'ensemble E sont de deux types : celles dont une partie est $\{x\}$, et celles dont ce n'est pas une partie. D'après la question précédente, on a donc bien $S_n^p = S_{n-1}^{p-1} + pS_{n-1}^p$.

d) Voici le triangle que l'on obtient en utilisant la relation démontrée à la question précédente.

1					
1	1				
1	3	1			
1	7	6	1		
1	15	25	10	1	
1	31	90	65	15	1

4. a) Le programme n'est pas correct. Il faut écrire

```
S=Part(n-1,p-1)+p*Part(n-1,p).
```

b) On retrouve bien les mêmes valeurs.

5a) 0 car un entier impair n'est jamais la somme d'entiers tous pairs !

5b) On choisit la première paire : 2 parmi 8 puis la seconde paire, 2 parmi 6, puis la troisième paire, 2 parmi 4 et enfin la dernière paire, 2 parmi 2.

Au total, principe multiplicatif, on a : $\binom{8}{2}\times\binom{6}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2} = 2520$ partitions d'un ensemble à 8 éléments en paires.

5c)

De même qu'à la question précédente, on choisit la première paire : $\binom{2n}{2}$ choix, puis on choisit la seconde paire : $\binom{2n-2}{2}$ choix et ainsi de suite jusqu'au choix de la dernière paire : $\binom{2}{2} = 1\ choix.$

D'après le principe multiplicatif, on a $\mathrm{N} = \binom{2n}{2}\times\binom{2n-2}{2}\times \dots\dots.\times\binom{2}{2} = \prod_{k=0}^{n-1}\binom{2n-2k}{2}.$

$\mathrm{N} = \frac{(2n)!}{(2n-2)!\times 2!}\times\frac{(2n-2)!}{(2n-4)!\times 2!}\times\dots\dots\times\frac{2!}{2!\times 0!} = \frac{(2n)!}{2^n}$

<u>Remarque</u> : pour vérifier, on applique la précédente relation à n = 4 : $\frac{8!}{2^4} = \frac{40320}{16} = 2520$ ***yes !***

5d) Autant qu'il y a de partitions en paires dans un ensemble à 30 éléments, c'est-à-dire d'après la question précédente, $\mathrm{N} = \frac{(30)!}{2^{15}}$, soit un nombre gigantesque compris entre 8×10^{27} *et* 9×10^{27} d'après la calculatrice, donc un nombre à 28 chiffres, vous pouvez toujours le calculer en valeur exacte avec python si vous n'avez rien de mieux à faire….

<u>Exercice IX</u>

$1 \leq p \leq q$

$1 \leq k \leq p$

$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ et $\binom{q}{k} = \frac{q!}{k!(q-k)!}$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{p}\frac{\binom{p}{k}}{\binom{q}{k}} = \sum_{k=1}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!}\times\frac{k!(q-k)!}{q!} = \sum_{k=1}^{p}\frac{p!(q-k)!}{q!(p-k)!}$

$\sum_{k=1}^{p}\frac{\binom{p}{k}}{\binom{q}{k}} = \sum_{k=1}^{p}\frac{p!}{(p-k)!}\times\frac{(q-k)!}{q!}$

astuce : on multiplie le numérateur et dénominateur de chaque terme par $(q-p)!$

$S = \sum_{k=1}^{p}\frac{\binom{p}{k}}{\binom{q}{k}} = \sum_{k=1}^{p}\left(\underbrace{\frac{(q-p)!\,p!}{q!}}_{=\frac{1}{\binom{q}{p}}}\times\underbrace{\frac{(q-k)!}{(p-k)!(q-p)!}}_{=\binom{q-k}{q-p}}\right) = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\binom{q}{p}}\binom{q-k}{q-p}$

$S = \frac{1}{\binom{q}{p}}\times\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\binom{q-k}{q-p}}_{\text{Formule du triangle de Pascal itérée}} = \binom{q}{q-p+1}.$

D'où $\boxed{S} = \frac{\binom{q}{q-p+1}}{\binom{q}{p}} = \frac{\frac{q!}{(q-p+1)!(p-1)!}}{\frac{q!}{p!(q-p)!}} = \frac{p!(q-p)!}{(q-p+1)!(p-1)!} = \boxed{\frac{p}{q-p+1}}$

Remarque : Cet exercice issu d'un oral de H.E.C est difficile et quasi introuvable en terminale !